二変数関数における C^2 級の条件

小林健太（一橋大学商学研究科）

二変数関数 $u(x,y)$ が C^2 級，つまり二階連続微分可能であることの条件は

$$u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$$

が全て連続になることである（下付きの添え字は偏微分を表す）.

ここで，上の条件は 3 つとも必要である．u_{xx} と u_{yy} が連続ならば u_{xy} も連続になりそうだが，実は u_{xx} と u_{yy} が連続にも関わらず u_{xy} が連続にならないような例が存在する．それを以下に示す.

$$u = \begin{cases} xy \log\log\left(1 + \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

とすると，$v = \log\left(1 + \dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ と置いて

$$u_{xx} = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^4 - 2x^2y^2 - 3y^4 - x^2 - 3y^2 - 2x^2/v)}{(x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2)^2 v} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2xy(x^4 - 2x^2y^2 - 3y^4 - x^2 - 3y^2 - 2x^2/v)}{(x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2)^2 v}\right| \\ &\leq \frac{(x^2+y^2)((x^2+y^2)^2 + 3(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2)/v)}{(x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2)^2 v} = \frac{(x^2+y^2) + 3 + 2/v}{(x^2+y^2+1)^2 v} \end{aligned}$$

となるが，$(x,y) \to (0,0)$ のとき $v \to \infty$ であるので u_{xx} は連続である．同様に u_{yy} も連続となる.

一方で

$$u_{xy} = \begin{cases} \log v - \dfrac{2(x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2/v)}{(x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2)^2 v} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

となるが

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2(x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2/v)}{(x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2)^2 v}\right| \\ &\leq \frac{2((x^2+y^2)^3 + (x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)^2/v)}{(x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2)^2 v} = \frac{2((x^2+y^2) + 1 + 1/v)}{(x^2+y^2+1)^2 v} \end{aligned}$$

より $(x,y) \to (0,0)$ で $|u_{xy}| \to \infty$ となるので u_{xy} は原点で不連続となる.