資産選択と伊藤の公式

小林健太（一橋大学商学研究科）

確率論の伊藤の公式の応用として，ポートフォリオの最適資産選択問題がある．問題自体は金融工学の創成期から解析対象となっているのだが，ここではそのなかでも一番簡単な例を紹介する．

投資やギャンブルにどれだけ資金を投入するか，というのはいつも悩ましい問題である．例えば，資金を賭けると p の確率で当たり，当たった場合には賭け金 1 につき a の払い戻しが受けられるギャンブルを考える．もちろん外れた場合には払い戻しは 0 である．賭け金は所持金の範囲で自由に設定できるものとし，さらに $ap > 1$，つまり賭ける側が有利であるとする（現実ではこんなことは有り得ないが）．

このギャンブルでは，賭け金が多ければ多いほど利益の期待値が大きくなる．よって，利益の期待値を最大化するには，常に全財産を賭ければよいということになる．しかし，このギャンブルに全財産を賭け続ければいつかは資金が 0 になるので，ほとんどの人にとってはこれはベストな選択ではない．

実際に資金配分を考える際には効用関数を用いるのが自然である．効用関数とは，簡単に言うと嬉しさの程度を表す関数のことである．例えば log 効用関数は，嬉しさを，所持金の額の対数であると考える．log 効用関数の下では，1 万円が 2 万円になったときの嬉しさと，100 万円が 200 万円になったときの嬉しさは同じになる．また，資金が 0 の嬉しさはマイナス無限大となる．

資金量が W として，上で述べたギャンブルに b だけ賭けるとする．このとき，log 効用関数の期待値は

$$E = p\log(W - b + ab) + (1 - p)\log(W - b)$$

となる．この期待値を b で微分すると

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{(ap - 1)W - (a - 1)b}{(W - b + ab)(W - b)}$$

となるので，log 効用関数の期待値を最大化するには $b = \dfrac{ap - 1}{a - 1}W$，つまり，所持金 1 あたり $\dfrac{ap - 1}{a - 1}$ の資金を賭ければよいということになる．

離散の場合は上のように期待値を計算すればよいが，連続の場合には伊藤の公式が威力を発揮する．B_t を標準ブラウン運動とし，ある金融商品の値動きが

$$dS = S(\mu dt + \sigma dB_t)$$

に従うものとする．また，無リスク金利を r とする．いま W の資産があるとき，この金融商品にどれだけの資金を投入すればよいだろうか？　ただし，今回は無リスク金利 r にて借金も可能とする．もし $\mu > r$ が成り立てば，この金融商品は預金するよりも有利なので，借金しまくって大量に買えば期待値は大きくなる．しかし，資金が大幅に減少するリスクも大きくなるので，ここでも効用関数を考えるのが自然である．

W のうち，この金融商品への投資額を b，残りを無リスク金利で運用するものとすると，W の変動は

$$dW = (W-b)rdt + b(\mu dt + \sigma dB_t) = (Wr + b(\mu - r))dt + b\sigma\, dB_t$$

となる．ここで log 効用関数の変動を伊藤の公式により求めると

$$d\log W = \frac{dW}{W} - \frac{(dW)^2}{2W^2} = \frac{(Wr + b(\mu - r))dt + b\sigma\, dB_t}{W} - \frac{b^2\sigma^2}{2W^2}dt$$

となる．

よって，log 効用関数の増加量の期待値が最も大きくなるのは

$$Q = \frac{Wr + b(\mu - r)}{W} - \frac{b^2\sigma^2}{2W^2}$$

が最大となるときである．

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \frac{\mu - r}{W} - \frac{b\sigma^2}{W^2}$$

より，log 効用関数の期待値を最大化するには $b = \dfrac{(\mu - r)W}{\sigma^2}$，つまり，所持金 1 あたり $\dfrac{\mu - r}{\sigma^2}$ の資金をこの金融商品に投入し続ければよいということになる（金融商品の値動きにより資金は増減するので，投入額は常に調整する必要がある）．