曲線で囲まれた面積を高精度に計算するには？
－数値積分とフーリエ級数の親密な関係－

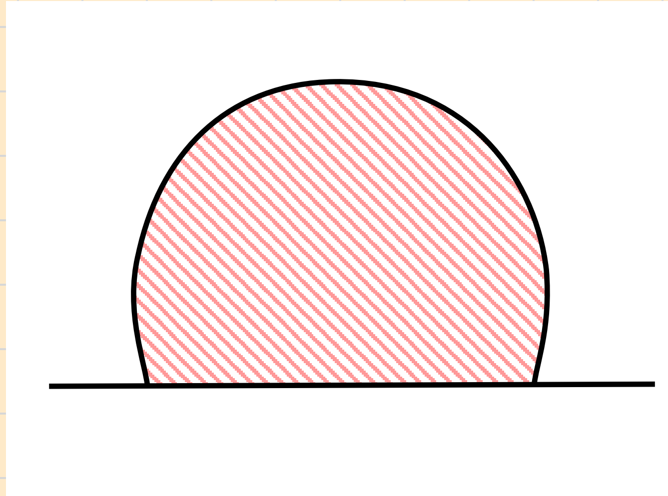
小林 健太

一橋大学 商学研究科

曲線で囲まれた面積

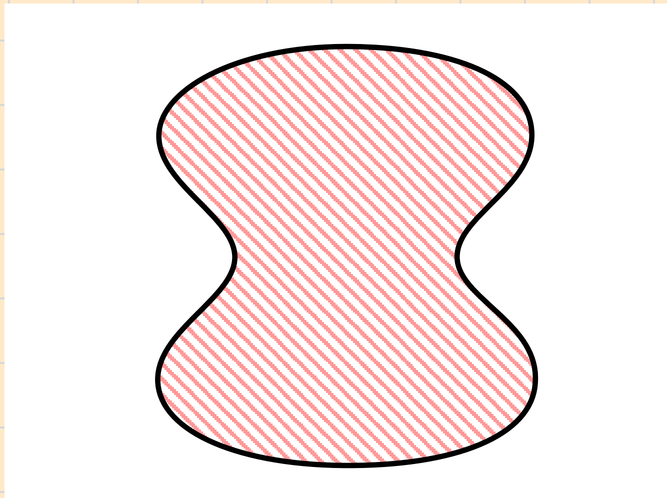
曲線で囲まれた面積を求めるにはどうしたらよいだろうか？

トンネルの断面積



青函トンネル
Wikipediaより転載

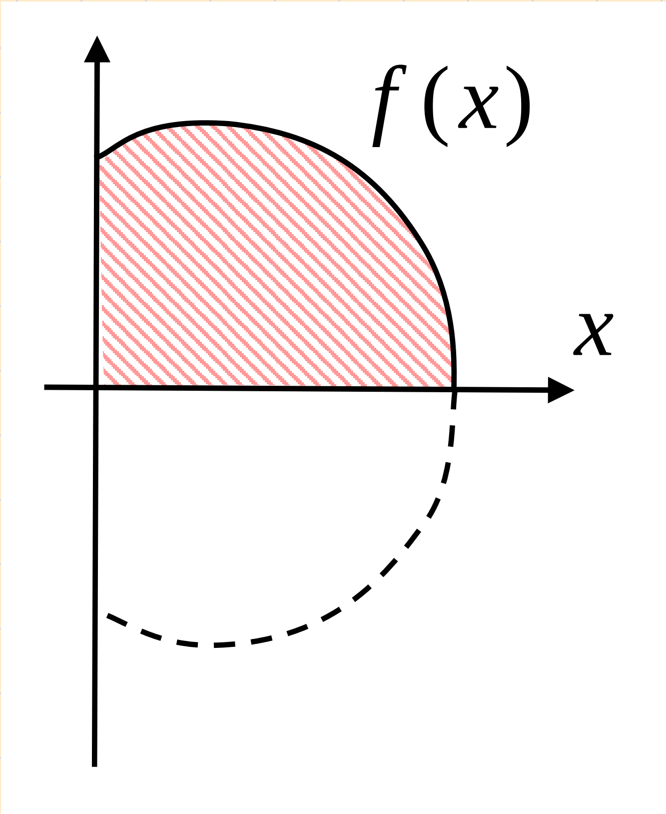
プールの面積



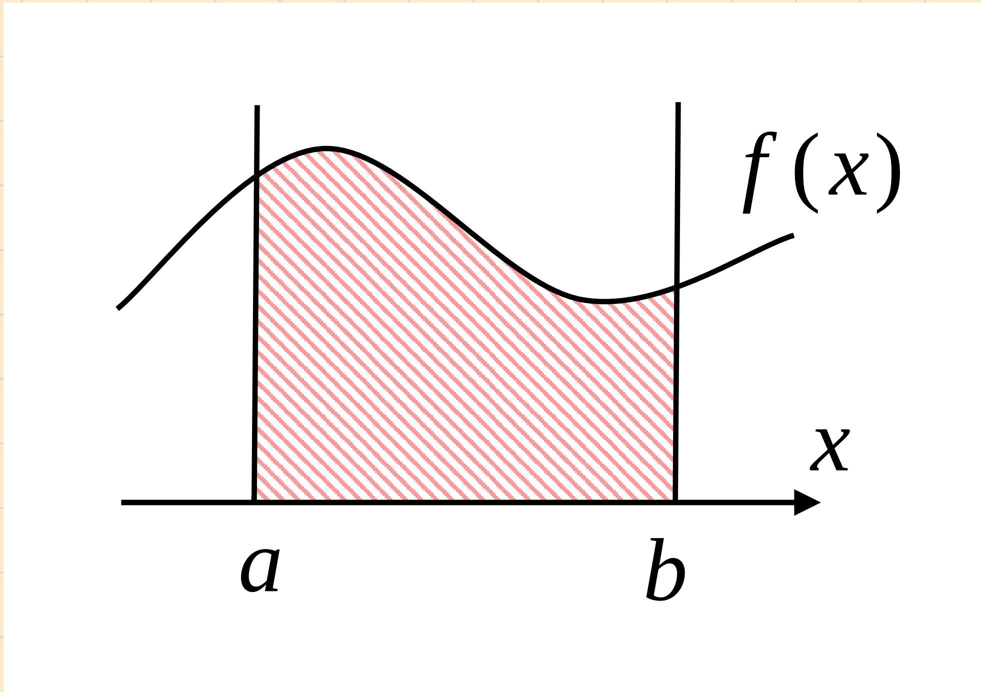
木曽川祖父江緑地
同HPより転載

曲線を表す式はわかっているものとする。

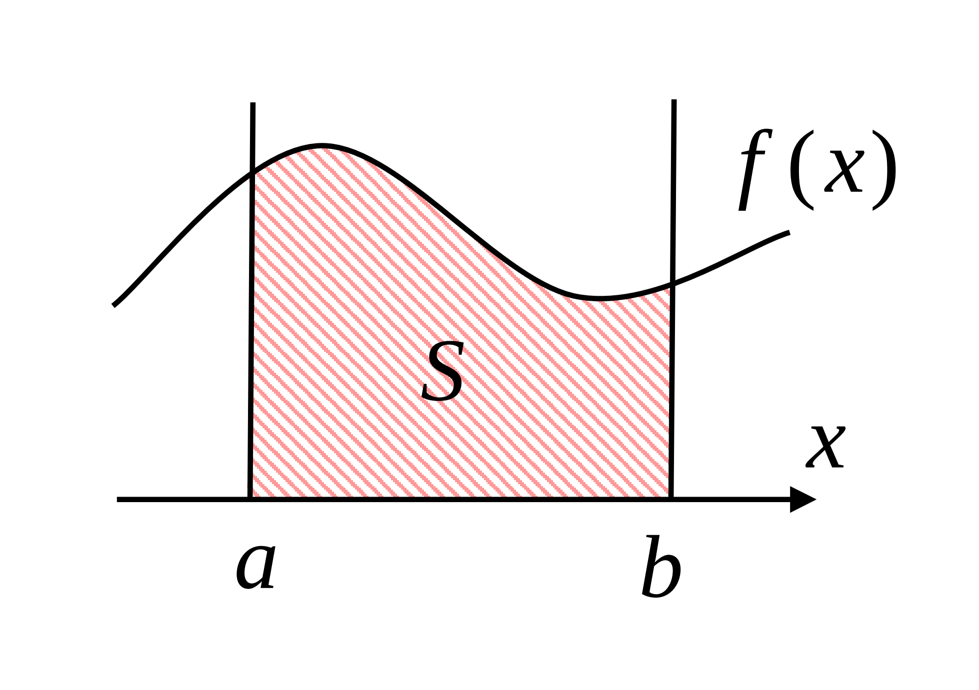
トンネルの断面を横にして考えると



一般的には、関数 $f(x)$ と直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれる面積が求まればよい。



定積分



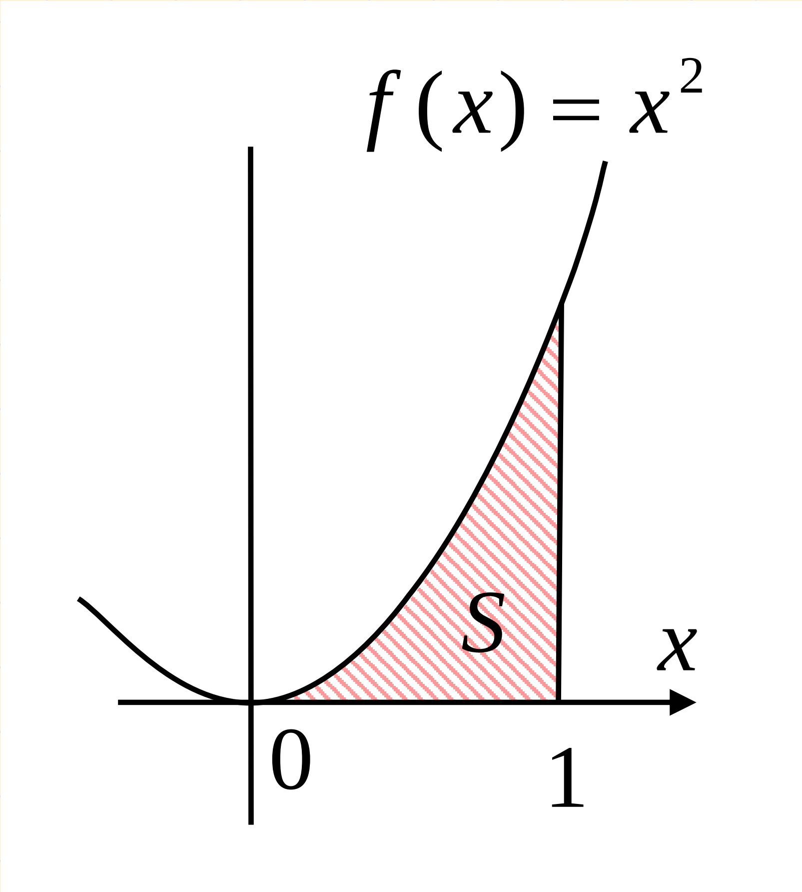
関数 $f(x)$ と直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれる面積は定積分で表すことができる。

積分記号を用いると

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

と書ける

定積分



たとえば、

$f(x) = x^2,\ a = 0,\ b = 1$

の場合は

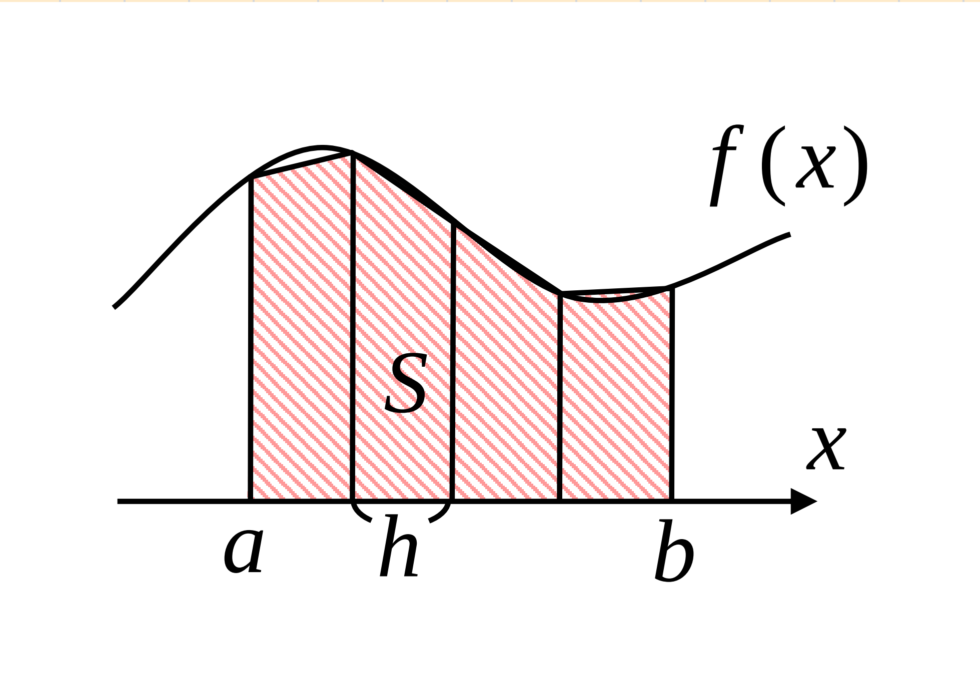
$$\boxed{S = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}}$$

と計算できる。

しかし、積分の公式が無いような関数の場合はどうしたらよいだろうか？

数値積分

面積を近似的に求めたい場合には、数値積分がよく用いられる。
数値積分にも色々あるが、一番簡単なのは、曲線を折れ線で近似して、台形の集まりとして計算する方法である。
これを台形則という。



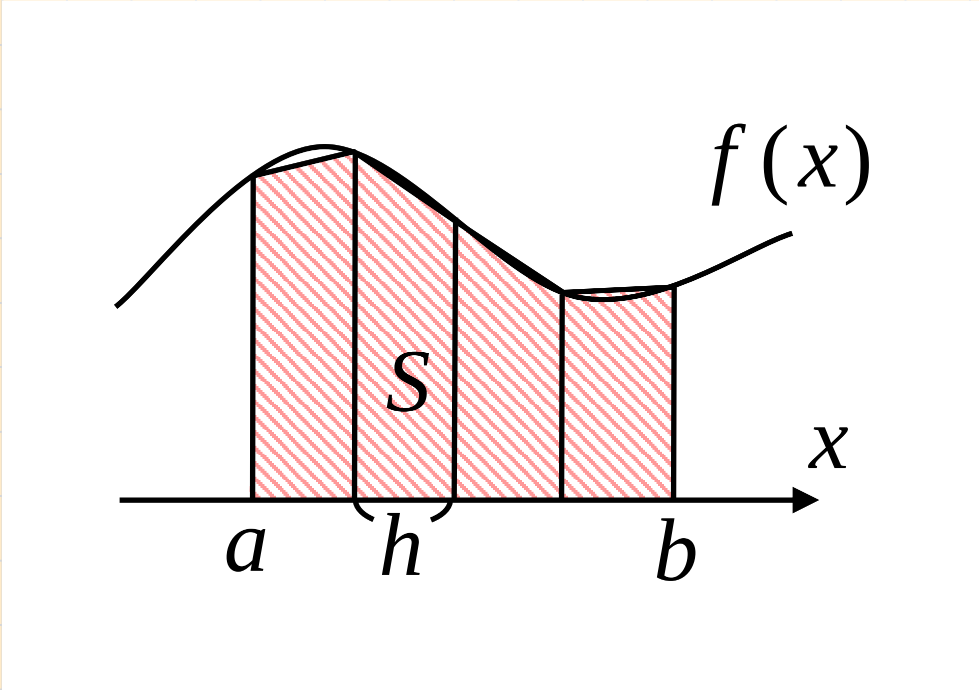
数値積分の利点：
- 積分公式の無い関数にも適用できる
- 関数が違っても、いつも同じ手順で計算できる

数値積分の難点：
- 厳密な値と比べると誤差が生じる

台形則

台形則において、刻みの幅を

$$h=\frac{b-a}{n}$$ とし、 $$x_k=a+kh$$

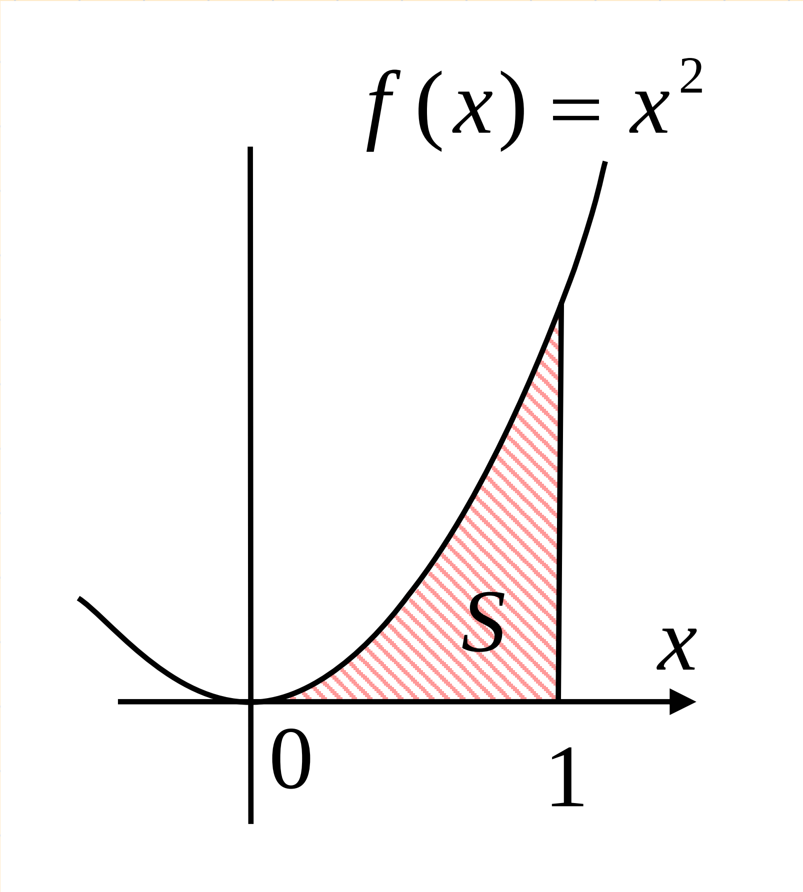


とすると

$$S\approx\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}h$$
$$=\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)h$$

となる。

実際の計算結果(その1)



$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

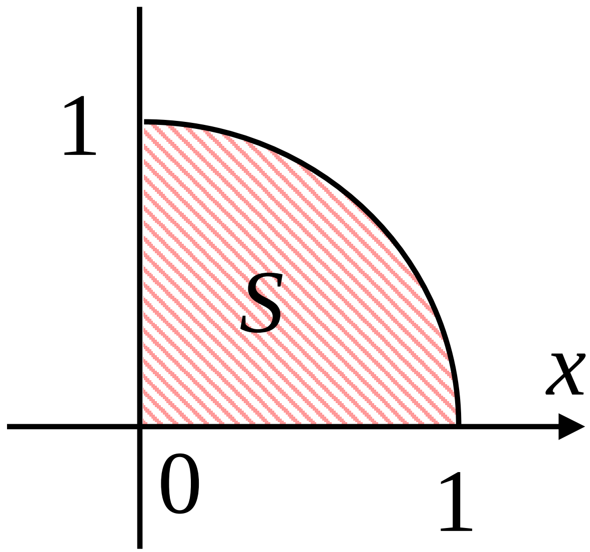
h	計算値	誤差
1	0.5000000000000	1.67×10^{-1}
0.1	0.3350000000000	1.67×10^{-3}
0.01	0.3333500000000	1.67×10^{-5}
0.001	0.3333335000000	1.67×10^{-7}
0.0001	0.3333333350000	1.67×10^{-9}
0.00001	0.3333333333500	1.67×10^{-11}

誤差は h^2 に比例することがわかる。

実際の計算結果(その2)

$$S=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$



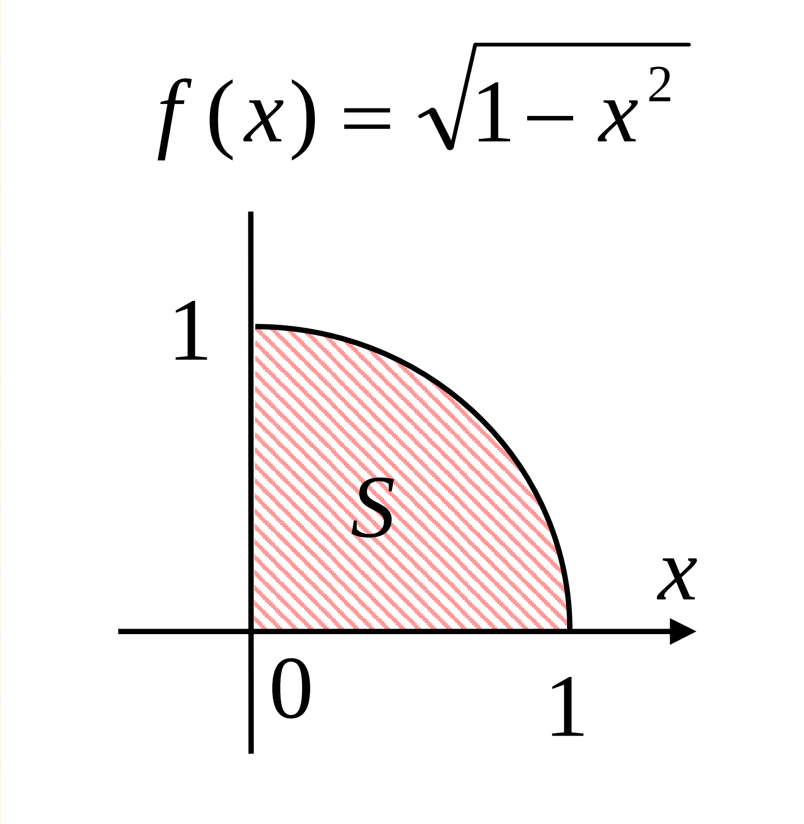
h	計算値	誤差
1	0.5000000000000	2.85×10^{-1}
0.1	0.7761295815621	9.27×10^{-3}
0.01	0.7851042579448	2.94×10^{-4}
0.001	0.7853888667278	9.30×10^{-6}
0.0001	0.7853978694028	2.94×10^{-7}
0.00001	0.7853981541005	9.30×10^{-9}

誤差は $h^{1.5}$ に比例することがわかる。
（ $x=1$ で誤差が大きくなっている）

実際の産業への応用などでは、多くの場合は台形則で十分な精度が得られるが、さらに高精度に計算するにはどうすればよいだろうか？

例えば、

$$\boxed{S=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}}$$



を利用して台形則で円周率を計算しようとすると、100桁の精度で計算するには、

$$h^{1.5}=10^{-100}\quad\Rightarrow\quad h=10^{-66.66\cdots}$$

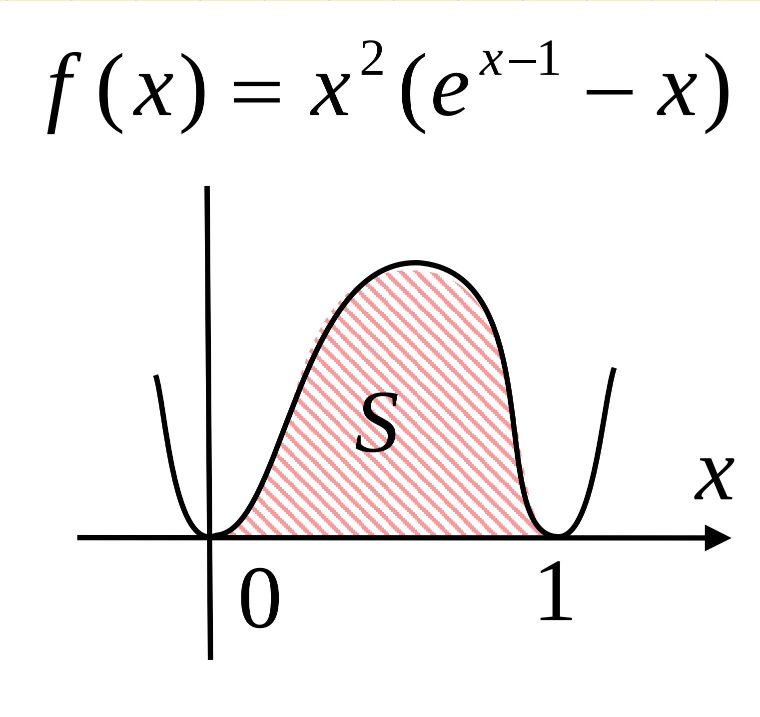
より、およそ 10^{67} 回関数の値を計算しなくてはならない。

世界最速のスーパーコンピュータを使っても、宇宙の年齢の1兆倍のさらに1兆倍のさらに1兆倍の時間がかかる！

諦めるしかないのか？

実際の計算結果(その3)

実は、関数によっては、台形則による誤差が小さくなることがある。



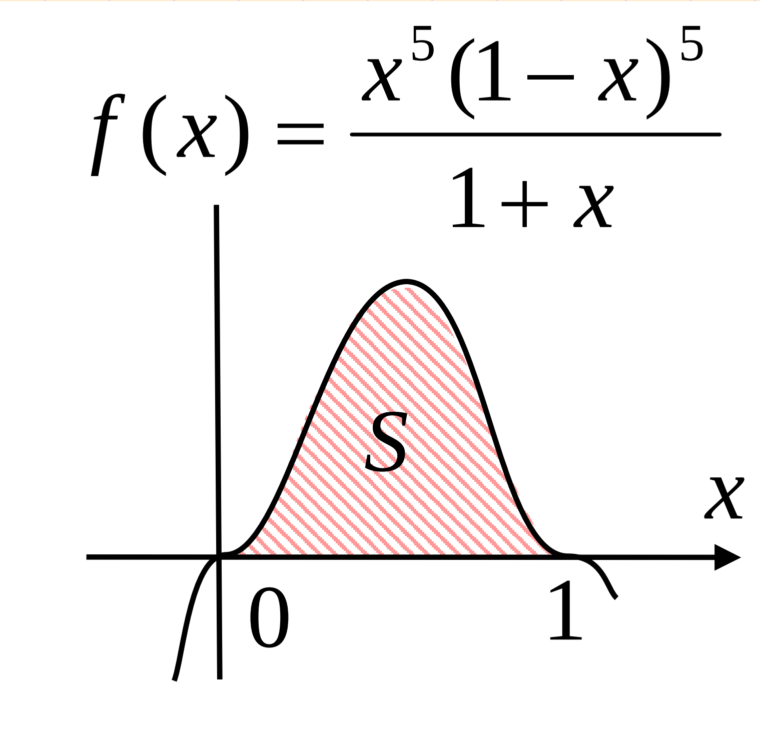
$$S = \int_0^1 x^2(e^{x-1} - x)dx = \frac{3}{4} - 2e^{-1}$$

h	計算値	誤差
1	0.0000000000000	1.42×10^{-2}
0.1	0.0142396194492	1.50×10^{-6}
0.01	0.0142411175072	1.50×10^{-10}
0.001	0.0142411176571	1.50×10^{-14}

誤差は h^4 に比例することがわかる。

実際の計算結果(その4)

$$S=\int_0^1 \frac{x^5(1-x)^5}{1+x}dx=\frac{2329}{105}-32\log 2$$



h	計算値	誤差
1	0.0000000000000	2.43×10^{-4}
0.1	0.0002425978863	5.15×10^{-9}
0.01	0.0002426030341	5.94×10^{-15}
0.001	0.0002426030341	5.95×10^{-21}

誤差は h^6 に比例することがわかる。

台形公式の誤差

台形則の誤差が h の何乗に比例して小さくなるかは、端点での滑らかさで決まる！

→ 理由は後から説明する

積分する関数 $f(x)$ を、積分値（面積）を保ったまま、端点でより滑らかな別の関数 $g(x)$ に変換できないだろうか？

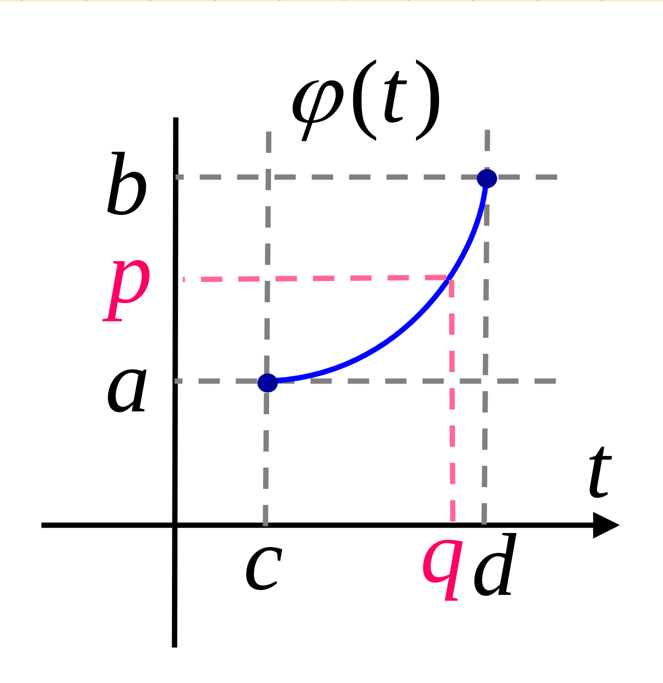
$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx = \int_c^d g(t)dt}$$

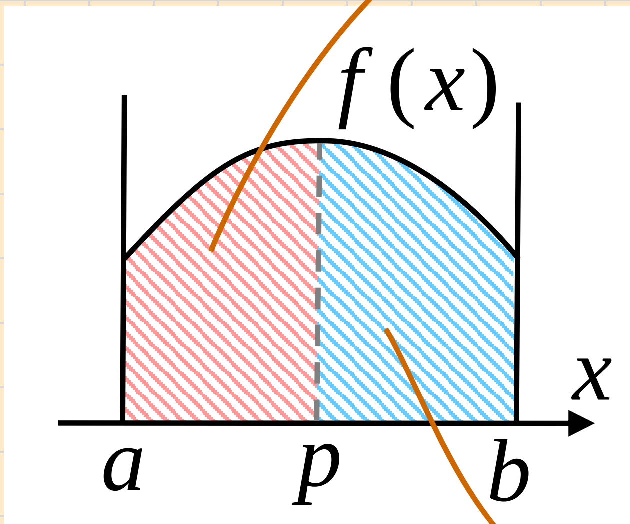
置換積分という方法がある！

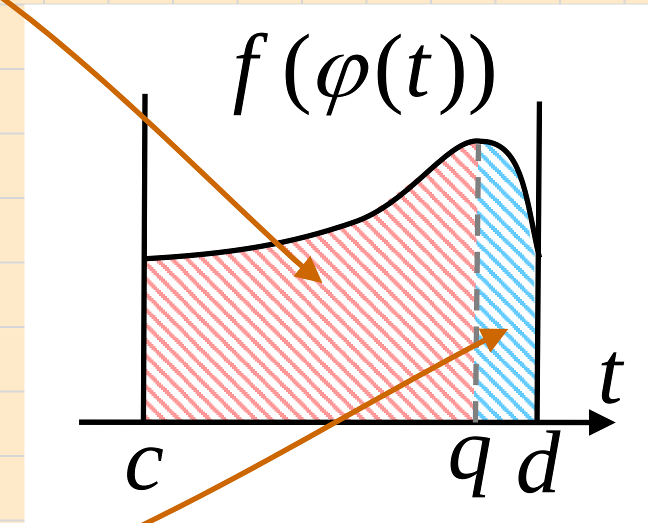
置換積分

$\varphi(c)=a,\quad \varphi(d)=b$ を満たす関数 $\varphi(t)$ を考え、$f(\varphi(t))$ の積分（面積）を考えてみる。

$\varphi(t)$ の変化が緩やかなので、
面積が引き伸ばされる

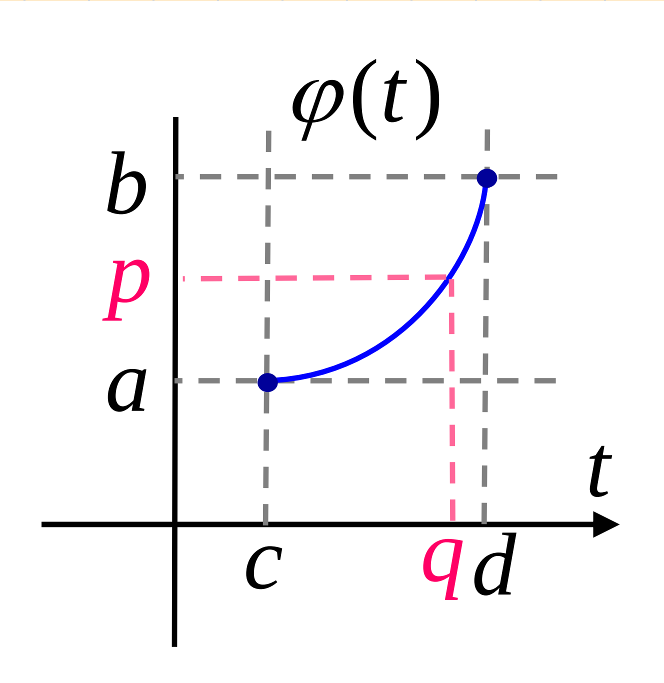


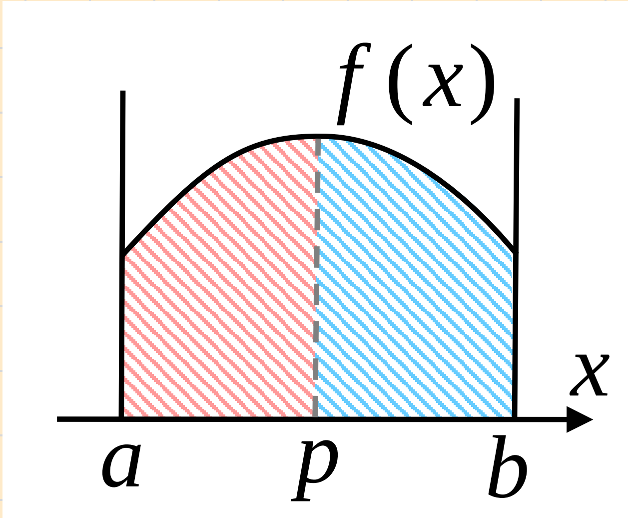


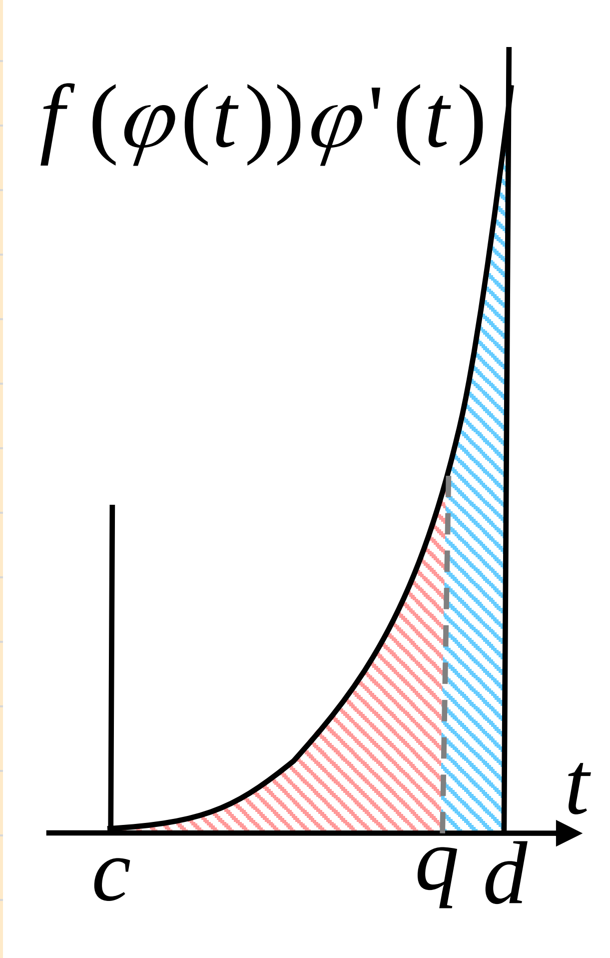


$\varphi(t)$ の変化が急なので、面積が
圧縮される

$f(\varphi(t))$ ではなく、 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ を考えると、$\varphi(t)$の変化の具合が調整されて面積が同じになる。







置換積分の公式

$\varphi(t)$ を $\varphi(c)=a,\quad \varphi(d)=b$ を満たす関数とするとき、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$ が成り立つ。

置換積分＋台形則

例えば積分区間を[0,1]とするとき、

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi(1)=1,\quad \varphi'(x)=ax^m(1-x)^m$$

となるような $\varphi(t)$ を用いて、積分を

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

と変形すれば、端点でゼロ関数に近くなり、台形則の効率がよくなるのではないか？

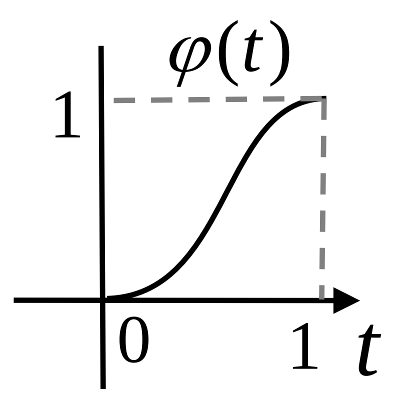
$m=1$ のとき $\varphi(t)=t^2(3-2t)$

$m=2$ のとき $\varphi(t)=t^3(10-15t+6t^2)$

$m=3$ のとき $\varphi(t)=t^4(35-84t+70t^2-20t^3)$

$m=4$ のとき $\varphi(t)=t^5(126-420t+540t^2-315t^3+70t^4)$

$n=1$ のときのグラフ



以下の式を利用して円周率を計算してみる。

$$\boxed{S=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx=\pi}$$

$m=50$ のときの $\varphi(t)$ を用いて

$$\boxed{S=\int_0^1 \frac{4\varphi'(t)}{1+\varphi(t)^2}dt}$$

と変換する。

計算結果

h	誤差
1	3.14×10^{-0}
0.1	6.22×10^{-2}
0.01	9.65×10^{-23}
0.001	2.88×10^{-98}
0.0001	2.96×10^{-150}

非常に精度が良くなった！

（円周率を計算するだけなら、他にもっと効率的な方法はあるが、応用性は数値積分の方が広い）

プログラムにおける注意

普通のプログラム環境での実数演算は16桁程度の精度しかないので、多桁の計算をするには不向きである。そこで、多倍長演算のできるプログラミング環境が必要である。

BASIC系　UBASIC　フリーソフトで非常に使い易いのだが、64bit環境に未対応なので、新しいパソコンでは使えない。

10進BASIC　フリーソフト。1000桁モードで四則演算と平方根のみ1000桁の計算ができる。

C言語　GNU Multi-Precision Library、exflibなど、ライブラリが色々ある。exflibが使い易くておすすめ。

その他　Maxima（フリー）、mathematica（有料）等、色々ある。

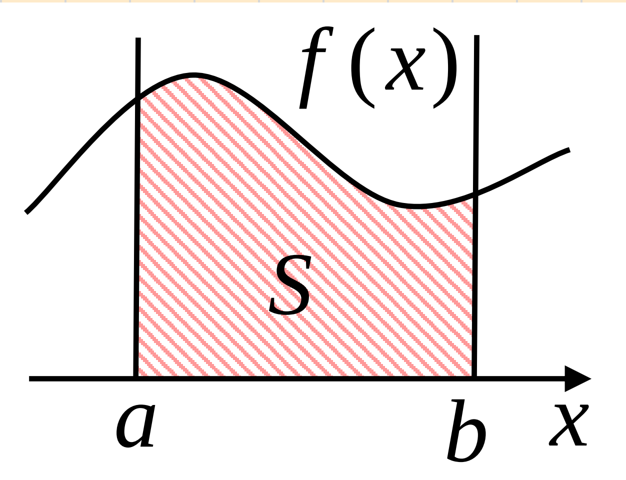
「多倍長演算」で検索すると様々な情報が見つかる。

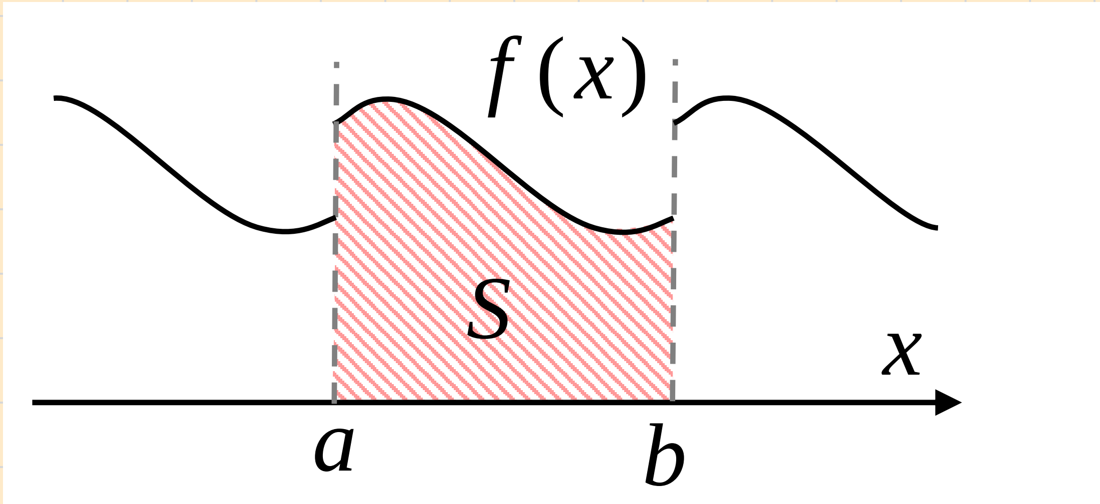
台形則の誤差解析

台形則の誤差の振る舞いが、関数の端点での様子に大きく影響されることがわかった。そこで、その理由を考えてみよう。

台形則の誤差は、「オイラー・マクローリンの公式」というものを用いて解析するのが一般的なのだが、ここでは後々の拡張を考えて、フーリエ級数による解析について説明する。

閉区間の積分は、周期的に張り合わせることで、周期関数の一周期積分と考えることができる。よって、周期関数について考察する。





フーリエ級数展開

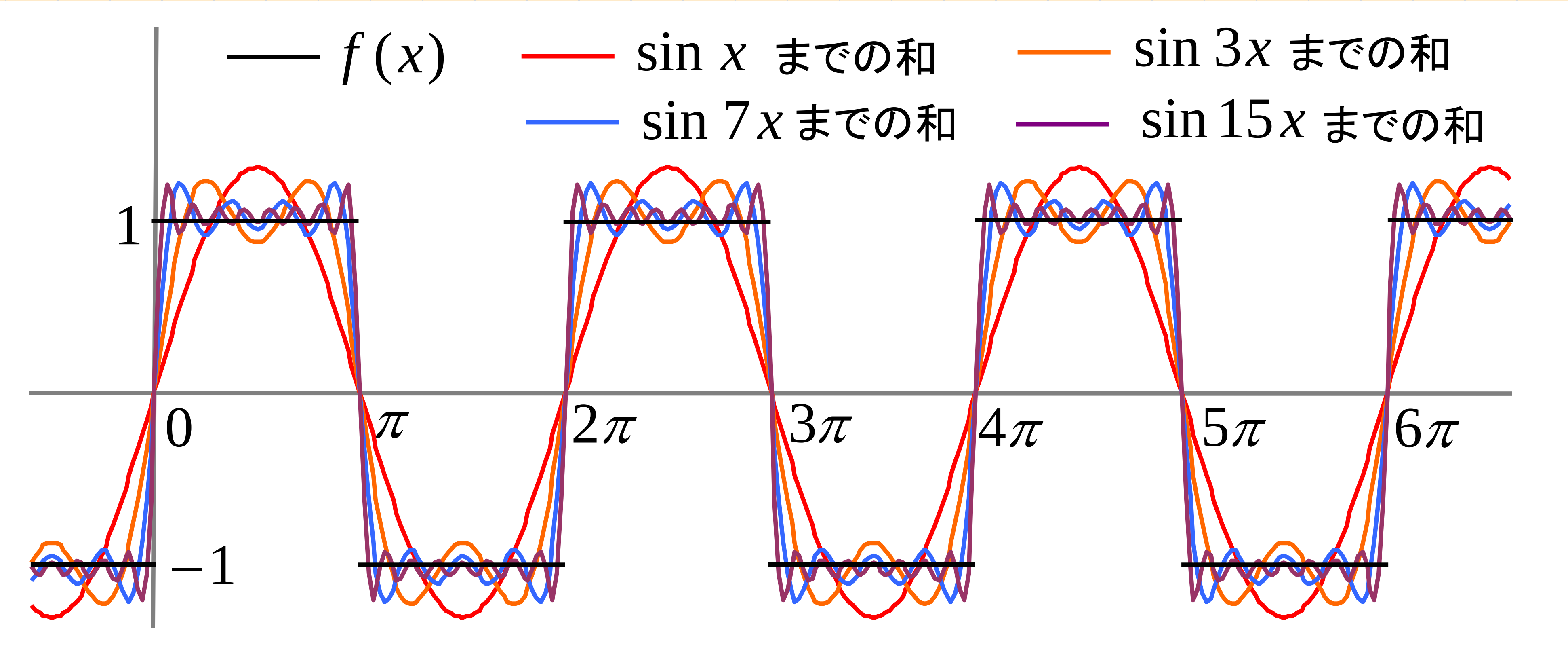
関数 $f(x)$ を周期 2π の周期関数とする。
$f(x)$ には不連続な点が有限個あってもよいとする。
このとき、$f(x)$ は以下のようにフーリエ級数展開できる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

フーリエ級数展開の例1

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<\pi)\\ -1 & (\pi<x<2\pi)\end{cases}$$ のとき、

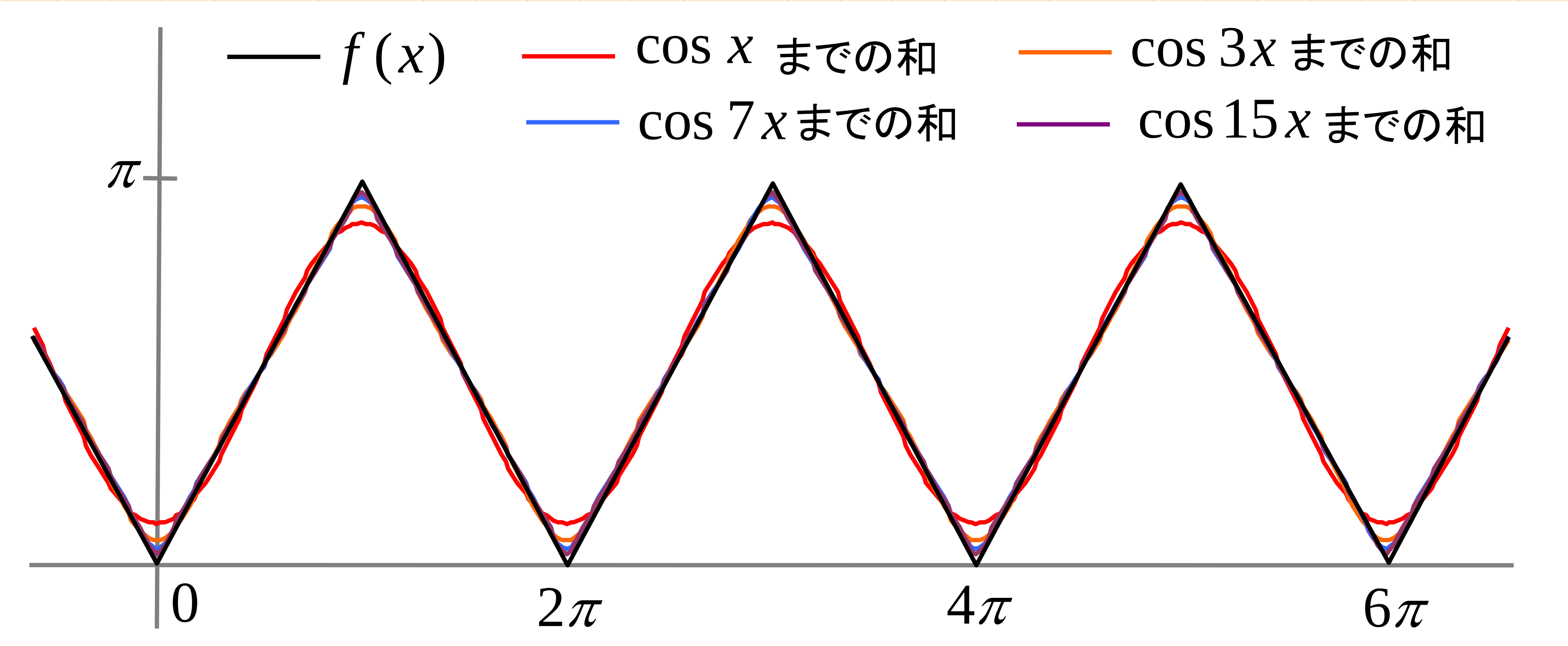
$$\boxed{f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right)}$$



フーリエ級数展開の例2

$$f(x)=\begin{cases} x & (0<x<\pi) \\ 2\pi - x & (\pi<x<2\pi) \end{cases}$$ のとき、

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\frac{\cos 9x}{9^2}+\cdots\right)}$$



フーリエ級数展開の利用

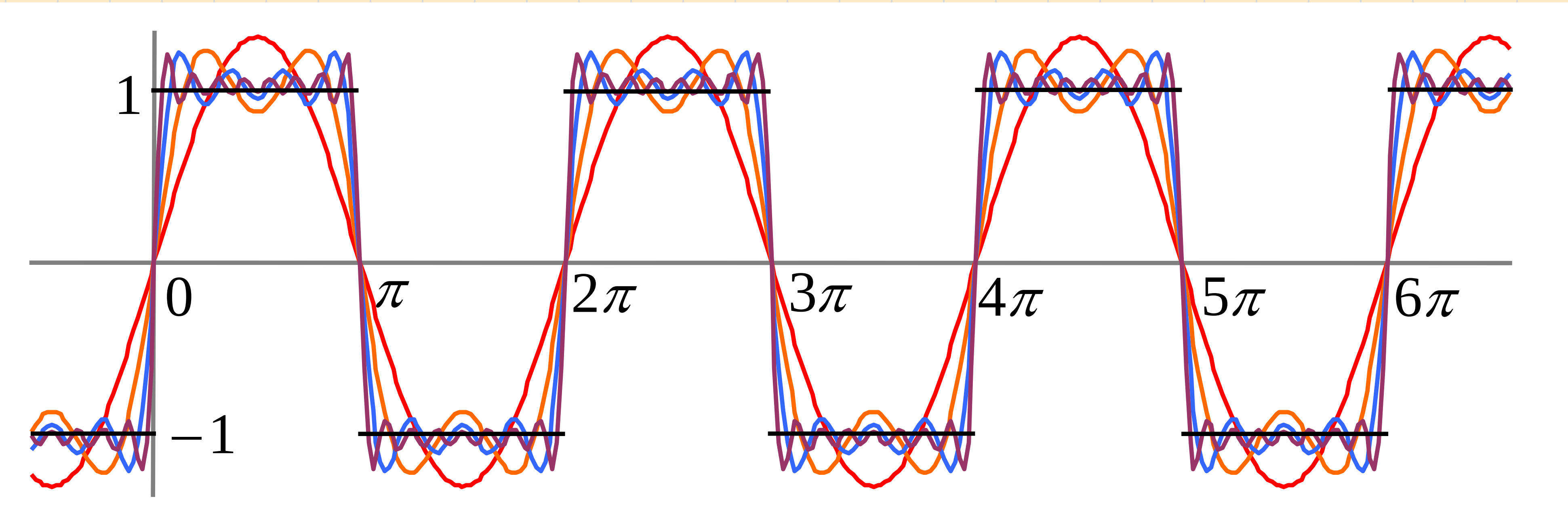
$$f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<\pi)\\ -1 & (\pi<x<2\pi)\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right)$$

に $x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入するとライプニッツ級数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

が得られる。



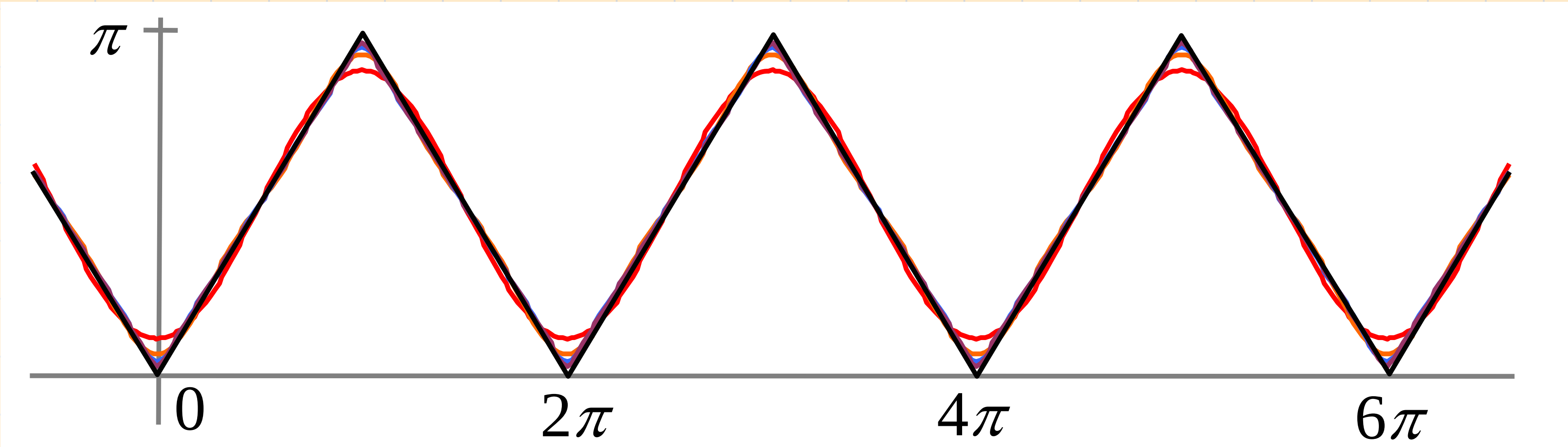
$$f(x)=\begin{cases} x & (0<x<\pi) \\ 2\pi-x & (\pi<x<2\pi) \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\frac{\cos 9x}{9^2}+\cdots\right)$$

に　$x=0$ を代入すると $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots$ が得られ、

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\\ &=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{32^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

が得られる。



フーリエ級数の係数の求め方

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

の係数を求めるには

直交性

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 2\pi & (m = n = 0) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \qquad \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m = n = 0) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

を利用する。例えば、 $\cos 3x$ を掛けて積分すると $a_3 \cos 3x$ の項以外は全て消える。

一般的に、以下のようにして係数が求まる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

台形則の誤差とフーリエ級数

簡単のため、積分範囲は $[0, 2\pi]$ とし、 $f(x)$ を周期関数と考える。

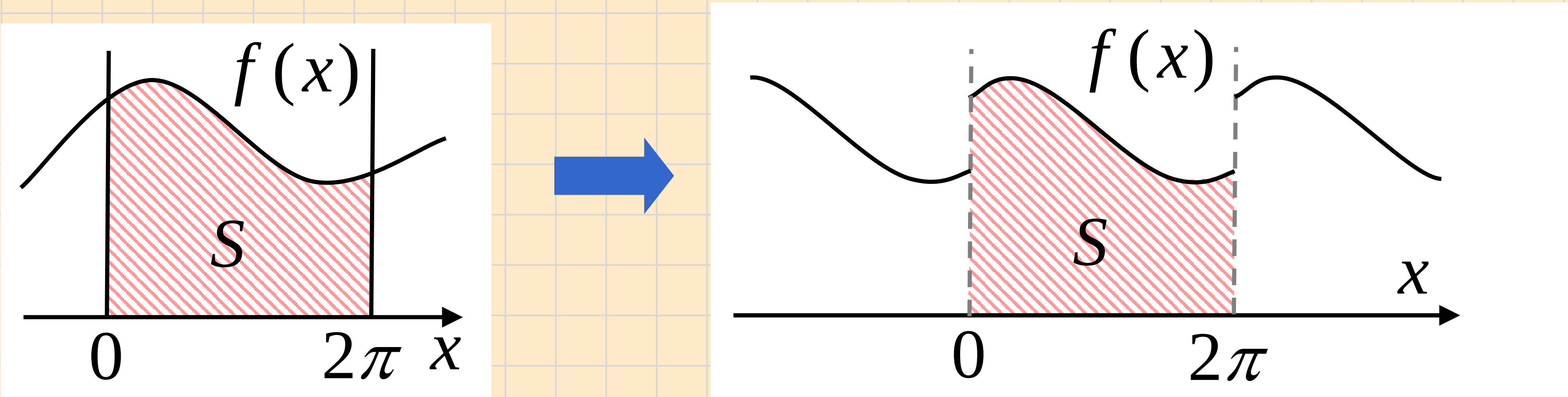
$f(x)$ が

$$
\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \end{aligned}}
$$

とフーリエ級数展開されるとき、三角関数の一周期積分は0なので

$$
\boxed{S = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \pi a_0}
$$

となる。



一方で、分割幅 $h=\dfrac{2\pi}{n}$ の台形則による面積は

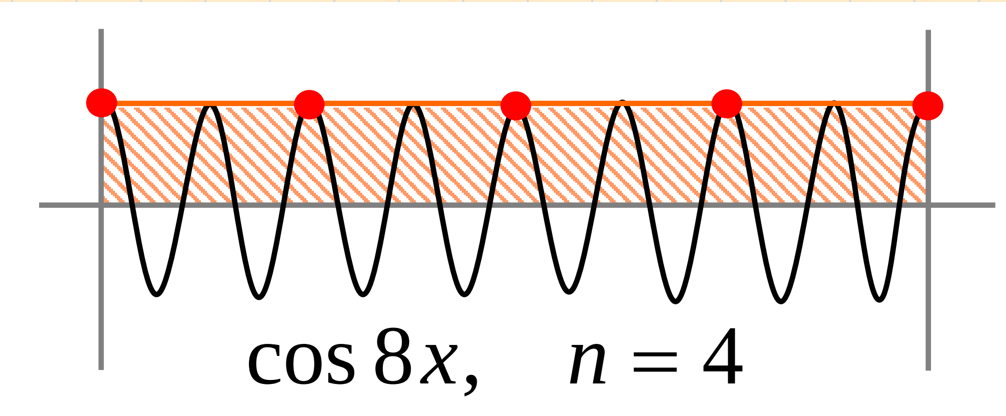
$$\boxed{S' = \pi a_0 + 2\pi(a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots)}$$

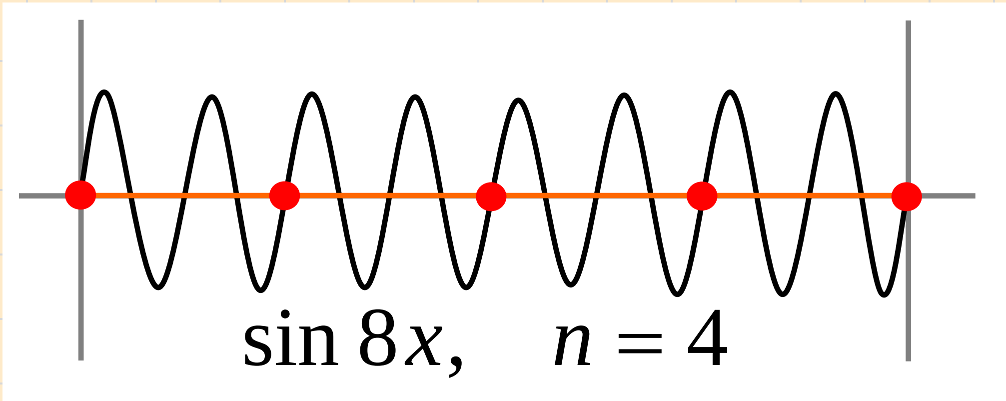
となる(※)。これより、台形則による誤差は

$$\boxed{S' - S = 2\pi(a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots)}$$

となる。つまり台形則の誤差はフーリエ級数の係数の大きさで解析することができる。

※の理由：下の図のように、m が n の倍数のときの $\cos mx$ の台形則による近似値は 2π に、$\sin mx$ の近似値はゼロとなる。





m が n の倍数ではないとき、 $\cos mx$ の台形則による近似値は

$$A = h\left(\frac{\cos 0}{2} + \cos mh + \cos 2mh + \cdots + \cos(n-1)mh + \frac{\cos nmh}{2} \right)$$

$\sin mx$ の台形則による近似値は

$$B = h\left(\frac{\sin 0}{2} + \sin mh + \sin 2mh + \cdots + \sin(n-1)mh + \frac{\sin nmh}{2} \right)$$

これより、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて

$$\frac{A+Bi}{h} = \frac{e^0}{2} + e^{imh} + e^{2imh} + \cdots + e^{i(n-1)mh} + \frac{e^{inmh}}{2}$$

$$= 1 + e^{imh} + e^{2imh} + \cdots + e^{i(n-1)mh} = \frac{1-e^{inmh}}{1-e^{imh}} = \frac{1-e^{2\pi im}}{1-e^{2\pi im/n}} = 0$$

となるので、 $A = B = 0$ が成り立つ（オイラーの公式を用いなくとも、高校範囲の数学でもできる）。

フーリエ級数の係数評価

台形則の誤差は $\boxed{S'-S = 2\pi(a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots)}$ で表せた。

では、 a_n の大きさはどの程度だろうか？

今、周期関数として考える前の $f(x)$ が以下を満たすとする。

$$\boxed{\begin{array}{l} f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi), \quad f''(0) - f''(2\pi), \\ \quad \cdots, \quad f^{(m-1)}(0) - f^{(m-1)}(2\pi), \quad f^{(m)}(0) = f^{(m)}(2\pi), \\ |f^{(m+1)}(x)| \le M_1, \quad |f^{(m+2)}(x)| \le M_2, \quad |f^{(m+3)}(x)| \le M_3 \\ \hfill (0 \le x \le 2\pi) \end{array}}$$

例えば $\varphi(t)$ を $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(2\pi) = 1, \quad \varphi'(t) = at^{m+1}(2\pi - t)^{m+1}$

を満たす関数、$g(x)$ を滑らかな関数とすると

$$\boxed{f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)}$$

は上の条件を満たす。

部分積分を用いると

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[f(x)\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left[f'(x)\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos nx\,dx = \frac{-1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos nx\,dx$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m/2}}{n^{m+2}\pi}\left[f^{(m+1)}(x)\cos nx\right]_0^{2\pi} - \dfrac{(-1)^{m/2}}{n^{m+2}\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(m+2)}(x)\cos nx\,dx & (m:\ \text{偶数のとき}) \\ \dfrac{(-1)^{(m+1)/2}}{n^{m+3}\pi}\left[f^{(m+2)}(x)\cos nx\right]_0^{2\pi} - \dfrac{(-1)^{(m+1)/2}}{n^{m+3}\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(m+3)}(x)\cos nx\,dx & (m:\ \text{奇数のとき}) \end{cases}$$

以上より

$$
|a_n| \le \begin{cases} \dfrac{1}{n^{m+2}\pi}\left(\left| \left[f^{(m+1)}(x)\cos nx \right]_0^{2\pi} \right| + \displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f^{(m+2)}(x)\cos nx \right| dx \right) \\ \qquad \le \dfrac{2M_1 + 2\pi M_2}{n^{m+2}\pi} = \dfrac{2M_1 + 2\pi M_2}{(2\pi)^{m+2}\pi} h^{m+2} \qquad (m:\ \text{偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{n^{m+3}\pi}\left(\left| \left[f^{(m+2)}(x)\cos nx \right]_0^{2\pi} \right| + \displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f^{(m+3)}(x)\cos nx \right| dx \right) \\ \qquad \le \dfrac{2M_2 + 2\pi M_3}{n^{m+3}\pi} = \dfrac{2M_2 + 2\pi M_3}{(2\pi)^{m+3}\pi} h^{m+3} \qquad (m:\ \text{奇数のとき}) \end{cases}
$$

となるので、台形則の誤差 $\boxed{S' - S = 2\pi(a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots)}$ は

m が偶数のとき、およそ h^{m+2} に比例する項で押さえられ、

m が奇数のとき、およそ h^{m+3} に比例する項で押さえられる

ことがわかる。 ➡ 数値計算結果とも合致している！

周期関数に対する台形則

台形則の誤差は、関数を周期関数として考えたときの滑らかさによって決まることがわかった。

それでは、関数が元から滑らかな周期関数である場合にはどうなるだろうか？

$$\boxed{S = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

n	計算値	誤差
1	3.1415926535897	4.86×10^{-1}
10	3.6275848872942	1.38×10^{-5}
100	3.6275987284684	4.63×10^{-57}
1000	3.6275987284684	8.19×10^{-572}

誤差は　$10^{-0.57n}$　程度の極めて速いペースで減少する。

→ 誤差の指数的減少

滑らかな周期関数のフーリエ級数の係数の大きさは、周期関数を $z=\cos x+i\sin x$ を用いて　z　の関数の実部として書いたときの、複素平面における原点から最も近い特異点（関数値が無限大になる点）までの距離を　r　として、r^{-n} に比例する（※）。

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+1)i-(\sqrt{3}-1)z}{(\sqrt{3}+1)i+(\sqrt{3}-1)z},\quad \operatorname{Re} g(z)=\frac{1}{2+\sin x}=f(x)$$

より、　$g(z)$　が無限大になるのは　$z=-\dfrac{(\sqrt{3}+1)i}{\sqrt{3}-1}=-(\sqrt{3}+2)i$

のときなので、台形則の誤差は

$$\left(\sqrt{3}+2\right)^{-n}=10^{-\log_{10}\left(\sqrt{3}+2\right)\times n}=10^{-0.5719\cdots n}$$

となり、実際の計算結果と一致する。

（※）は大学で複素関数論という理論を学ぶとわかる

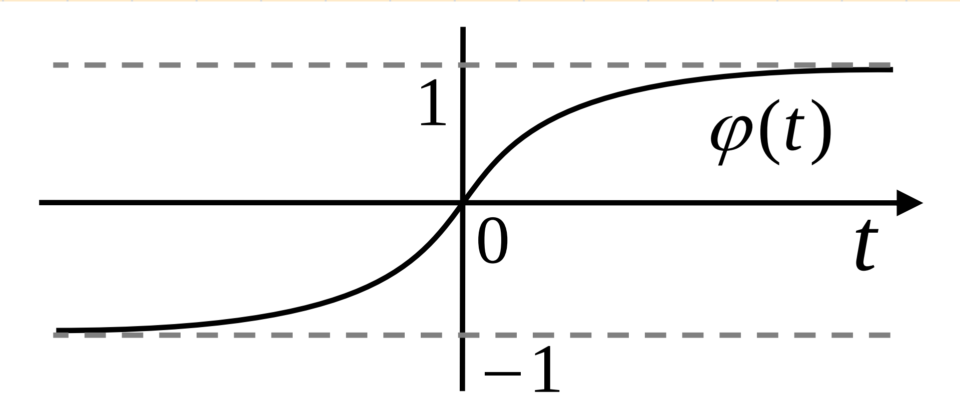
二重指数型積分公式

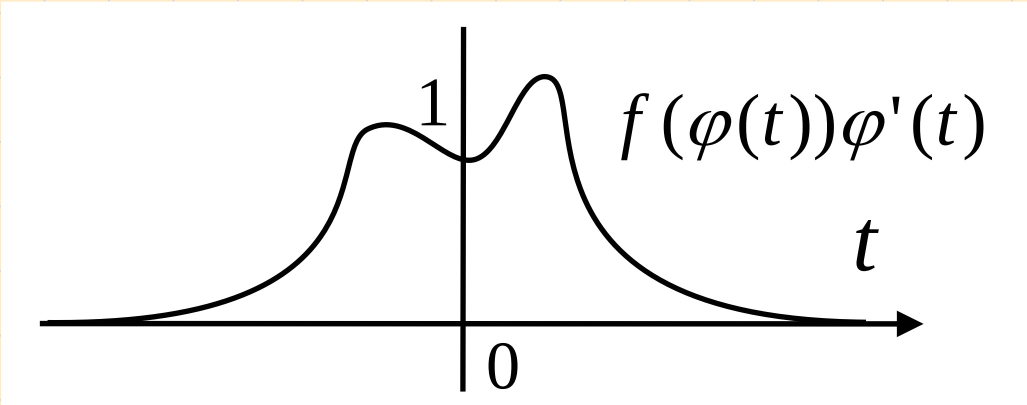
置換積分＋台形測による数値積分は、様々なものが考案されているが、現在、最も強力な公式は、森正武、高橋秀俊によって考案された二重指数型積分公式（DE公式）である。

二重指数型積分公式においては、あらかじめ積分区間を[-1,1]に変換した上で、

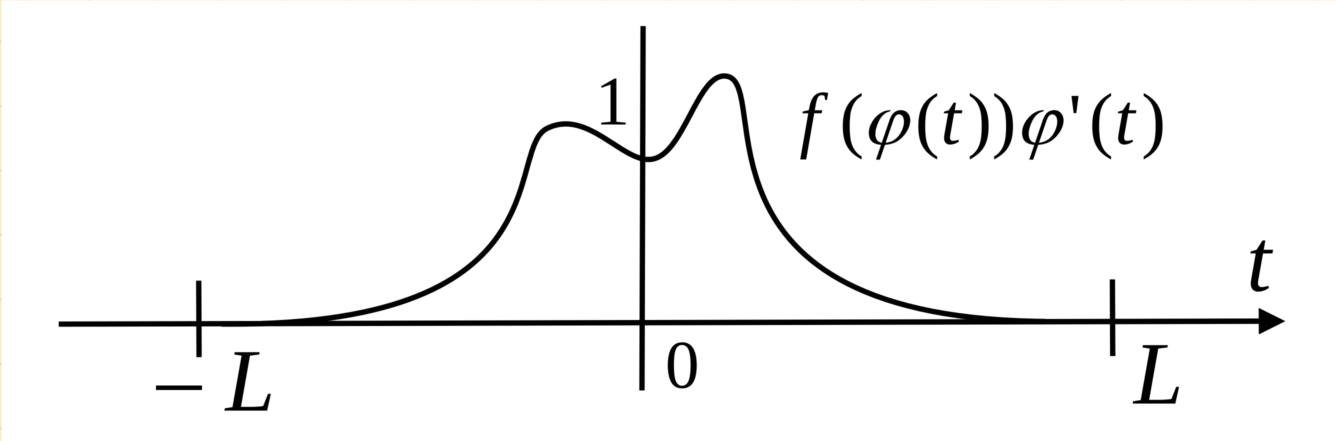
$$\boxed{\varphi(t) = \tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)} \qquad \left(\begin{aligned} \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}\right)$$

なる関数で積分変換を行い、無限区間の積分に変換する。





そのうえで、区間 [-L, L] で打ち切って台計測を適用する。



$\varphi'(t)$ は極めて急激に減少するので、区間 [-L, L] で打ち切って周期関数と考えたとき、非常に滑らかになる。

分割数　n に対して　L を適切に選ぶことにより、DE積分公式の誤差はおおよそ

$$C_1 \exp\left(-\frac{C_2 n}{\log n}\right)$$

程度になることがわかっている。

ここで C_1, C_2 は　$f(x)$ によって決まる定数。

➡ 指数的減少に近いペースでの誤差の減少

二重指数型積分公式の計算結果

$$S=\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+x^2}dx=\pi$$

n	L	誤差
50	2.9	5.85×10^{-12}
100	3.4	1.03×10^{-20}
150	3.8	7.93×10^{-28}
250	4.2	2.39×10^{-35}
300	4.5	3.76×10^{-42}

周期関数でなくとも、理論どおり指数的に近い誤差の減少が見られる。

二重指数型積分公式の誤差解析にも、大学で習う 複素関数論の知識が必要。

まとめ

- 台形則による数値積分の誤差をフーリエ級数の世界から解析した。
- フーリエ級数は、数学のなかでも「解析学」という分野の話題である。
- 解析学というのは、関数の性質を微分や積分などを用いて研究する分野である。
- 整数の問題だけが数学ではないということで、解析学にも興味を持ってもらえると嬉しい。
- 解析学のなかで、数値計算の手法の開発や数学的な解析を行う分野を「数値解析」といい、産業への応用上も非常に重要である。
- 誤差というとランダムなイメージだが、誤差にも秩序があり、数学的に解析することができる。

余談

大学の研究者って何をしているの？

- 研究をして論文を書いたり学会で発表したりする
- 大学で授業をする
- 大学院生の研究を指導する
- 大学運営の事務仕事をする

良い点

- 時間的な自由さ
- やりがい

大変な点

- 絶え間ないプレッシャー

進路

大学

↓

大学院修士課程

↓

大学院博士課程

↓

博士号取得

↓

研究員、助教など

↓

講師、准教授など

大学の研究者は狭き門だが、企業の研究者になるという道もあり。