岡本による，いたるところ微分不可能な関数について

小林健太（一橋大学商学研究科）

いたるところ微分不可能な関数としては，ワイエルシュトラス関数や高木関数などが知られていますが，ここでは，岡本久（元京都大学数理解析研究所教授，現学習院大学教授）が考案した，興味深い関数を紹介します．以下，この関数を岡本関数と呼ぶことにします．

岡本関数は，以下の (i)〜(iv) によって定義される関数列 $\{f_n\}$ の極限として定義されます．

(i) $f_0(x) = x$,

(ii) $f_{n+1}(x)$ は $[0,1]$ で連続,

(iii)
$$\begin{aligned}
f_{n+1}\left(\frac{3k}{3^{n+1}}\right) &= f_n\left(\frac{k}{3^n}\right), \\
f_{n+1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}\right) &= f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + a\left[f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right) - f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)\right], \\
f_{n+1}\left(\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right) &= f_n\left(\frac{k}{3^n}\right) + (1-a)\left[f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right) - f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)\right], \\
f_{n+1}\left(\frac{3k+3}{3^{n+1}}\right) &= f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right),
\end{aligned}$$
ただし $k = 0, 1, \cdots, 3^n - 1$,

(iv) $f_{n+1}(x)$ は各区間 $\left[\frac{k}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]$ で一次関数（ただし $k = 0, 1, \cdots, 3^{n+1} - 1$）.

ここで，a は $0 < a < 1$ なる定数です．

図 1 に，区間 $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ における $f_n(x)$ と $f_{n+1}(x)$ のグラフを示します．ただし，k は 0 以上 3^n 未満の整数とします．区間 $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ において，$f_n(x)$ は直線になりますが，$f_{n+1}(x)$ は 3 つの折れ線で構成されることになります．

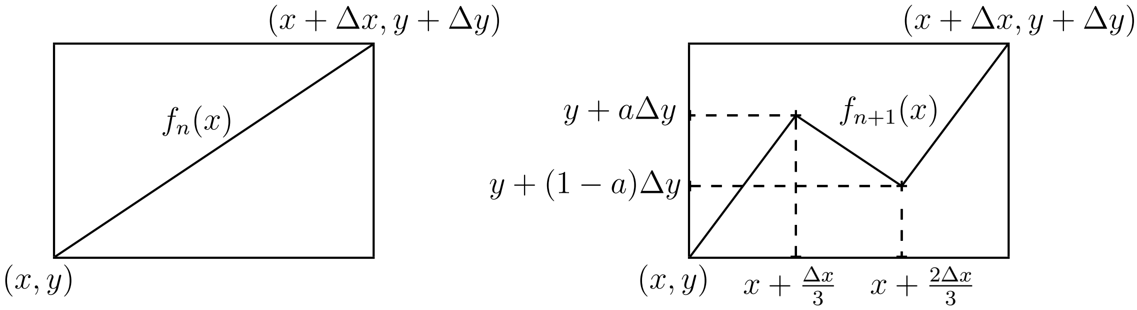

図 1: 区間 $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ における $f_n(x)$（左）および $f_{n+1}(x)$（右）の様子．

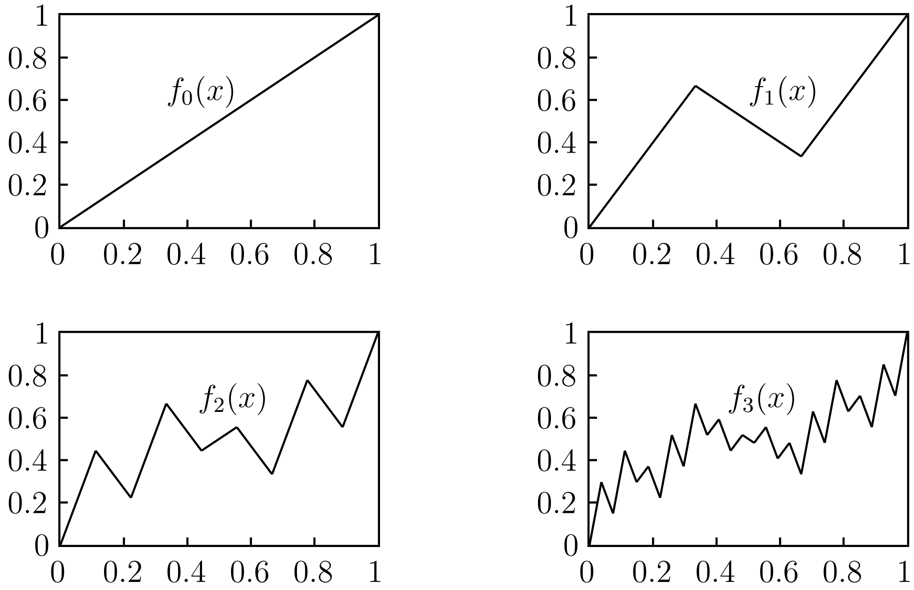

図 2: $a = 2/3$ のときの $f_0(x) \sim f_3(x)$

図 2 に，$a = 2/3$ のときの $f_0(x) \sim f_3(x)$ の全体像を示します．このようにして構成していった $\{f_n\}$ に対し，岡本関数 $F_a(x)$ を

$$F_a(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

と定義します．

次のページの図 3 に，様々な a の値に対する岡本関数 $F_a(x)$ のグラフを示します．a の値によって滑らかさが大きく変わることが見て取れます．また，$F_a(x)$ は，$a = 1/3$ のときは一次関数，$a = 1/2$ のときは Cantor の特異関数（悪魔の階段），$a = 2/3$ のときは Bourbaki の関数，$a = 5/6$ のときには Perkins の関数となります．

岡本関数の滑らかさについては

Hisashi Okamoto, A remark on continuous, nowhere differentiable functions, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Vol.81 (3), 2005, pp.47-50.

で詳しく調べられており，それによると，$a_0 = 0.559216\cdots$ を $54a^3 - 27a^2 - 1 = 0$ の実数解とすると，

(i) $0 < a < a_0$ のとき $F_a(x)$ は，ほとんどいたるところ微分可能．

(ii) $a_0 < a < 2/3$ のとき $F_a(x)$ は，ほとんどいたるところ微分不可能．

(iii) $2/3 \leq a < 1$ のとき $F_a(x)$ は，全ての点で微分不可能．

となることが知られています．

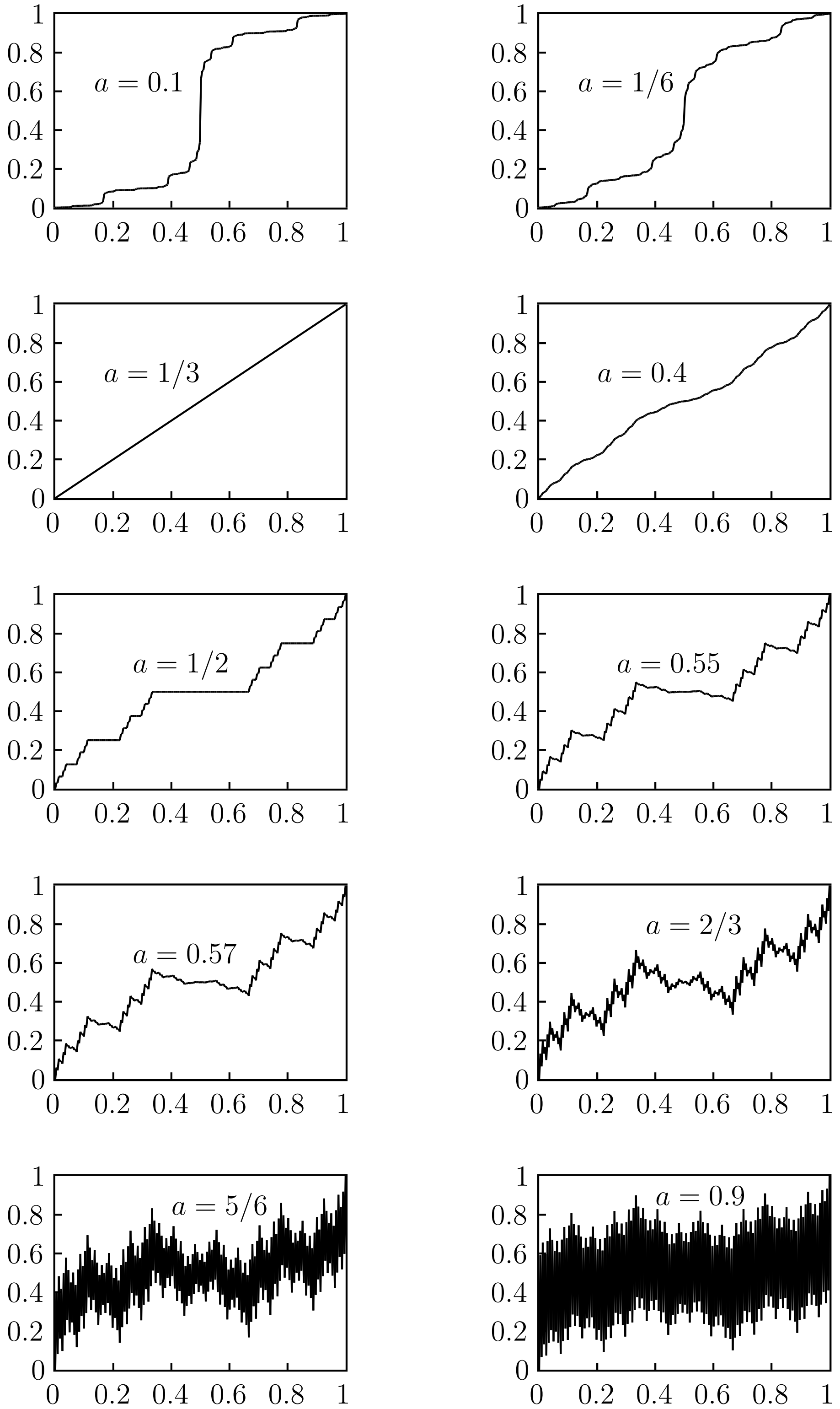

図 3: $a = 0.1,\ 1/6,\ 1/3,\ 0.4,\ 1/2,\ 0.55,\ 0.57,\ 2/3,\ 5/6,\ 0.9$ のときの岡本関数

つまり，$a = a_0$ を境に，微分不可能な点の測度が 0 から 1 へ劇的に変化するということです．図 3 のグラフを見ても，$a = 0.55$ と $a = 0.57$ のグラフに大きな違いは見られないのですが，滑らかさは大きく異なっているということになります．

ところで，前掲の岡本による論文では，$a = a_0$ のときに微分不可能な点の測度がどうなるかは未解決でしたが，私は，$a = a_0$ のときには，ほとんどいたるところ微分不可能であることを証明しました．その結果は

> Kenta Kobayashi, On the critical case of Okamoto's continuous non-differentiable functions, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Vol.85 (8), 2009, pp.101-104.

に掲載されています．

岡本関数はフラクタル的な構造を持ちますので，そのフラクタル次元を求めてみたいと思います．フラクタル次元にも色々あるのですが，ここではボックスカウティング次元を用います（おそらくハウスドルフ次元とも一致すると思います）．k を整数とし，$x_k = k/3^n$ とすると，$x_k < x < x_{k+1}$ において $F_a(x_k) < F_a(x) < F_a(x_{k+1})$ もしくは $F_a(x_k) > F_a(x) > F_a(x_{k+1})$ が成り立ちます．よって，$[0,1]^2$ を一辺 3^{-n} の正方形に分割し，グラフの通る正方形の個数を数えることにより，岡本関数のフラクタル次元は

$$D_a = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log 3^n} \log\left(3^n \sum_{k=0}^{3^n-1} |F_a(x_{k+1}) - F_a(x_k)|\right)$$

とあらわすことができ，具体的に計算すると

$$\begin{aligned} D_a &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log 3^n} \log\left(3^n \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} a^k |1-2a|^{n-k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log 3^n} \log\left(3^n (2a + |1-2a|)^n\right) \\ &= 1 + \frac{\log(2a + |1-2a|)}{\log 3} \end{aligned}$$

となります．つまり，$a \le 1/2$ のときには $D_a = 1$ となり，$a > 1/2$ では a が 1 に近づくにつれて D_a は 2 に近づいていきます．$a \le 1/2$ のとき $D_a = 1$ となることは，$F_a(x)$ が単調非減少でグラフの長さが有限になることからもわかります．