円周率が3.14より大きく3.145より小さいことの証明

小林健太（一橋大学商学研究科）

1. 目的と方法

円周率 π が

$$3.14 < \pi < 3.145$$

を満たすことを，あまり予備知識を仮定することなく証明したいと思います．

証明する前に，何をもって円周率とするかを決めておかねばなりません．円周率を単位円の面積として定義することもできますし，例えばマチンの公式などで定義することもできます．しかし，ここでは一番素朴に，直径と円周の長さの比として定義することにします．

証明には，円周の長さを内接正多角形と外接正多角形の周の長さで挟むアルキメデスの方法を用います．ただし，アルキメデスの方法では分数を用いて証明しているところを，小数を用いるように変更しています（アルキメデスの方法については
`http://cm.hit-u.ac.jp/~kobayashi/topics/arctan.pdf` をご覧下さい）．

2. 内接正多角形および外接正多角形の周の長さと円周の長さの関係

アルキメデスの方法を適用するには，まずは円周の長さが内接正多角形の周の長さより大きく，外接正多角形の周の長さより小さいことを示す必要があります．図1は，円に正多角形が内接および外接している様子を示しており，AC が内接正多角形の一辺，AD と DC が外接正多角形の一部となっています．図は，AC が水平になるように描いてあります．

さて，2点を結ぶ最短経路は直線となるため，弧 ABC の長さよりも直線 AC の長さの方が小さく，このことから，内接正多角形の周の長さは円周の長さより小さいことがわかります．次に，弧 AB と直線 AD を比べると，水平方向の移動距離は等しいのですが，垂直方向の移動距離は弧 AB より直線 AD の方が大きいことがわかります．よって，弧 AB の長さよりも直線 AD の長さの方が大きく，外接正多角形の周の長さは円周の長さより大きいことがわかります．

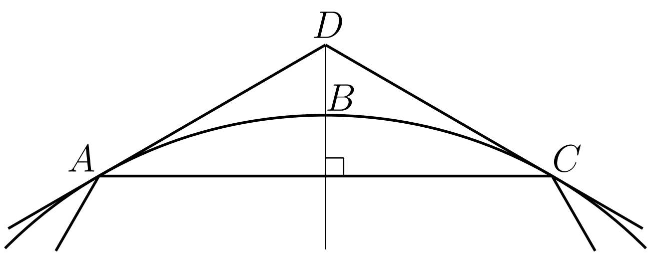

図 1: 内接正多角形と外接正多角形

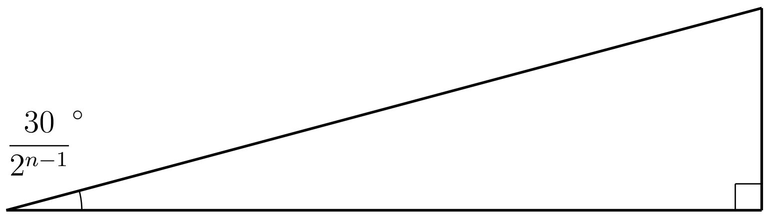

図 2: 正 $3 \cdot 2^n$ 角形を分割した時に出来る直角三角形

実をいうと，外接正多角形についてのこの説明は，数学的にはあまり厳密ではありません．この原稿の後の補足で，もう少し厳密な説明をしますので，興味のある方はそちらも読んで下さい．

3. 正多角形を分割してできる直角三角形

これ以降，正多角形としては正 $3 \cdot 2^n$ 角形を考えます．ただし，n は 1 以上の整数です．そのため，この正多角形を分割した図 2 のような直角三角形の辺の長さについて調べます．

図 3 のように，直線 OB を取り，B を通り OB に垂直な直線を l とします．次に，l 上に $\angle A_1OB = 30^\circ$ となるように A_1 を取ります．さらに，$\angle A_1OB$ の二等分線と l の交点を A_2，$\angle A_2OB$ の二等分線と l の交点を A_3，$\angle A_3OB$ の二等分線と l の交点を A_4，……，と順次 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$ を取っていきます．このとき，二等分線の定理より

$$OA_n : OB = A_nA_{n+1} : A_{n+1}B$$

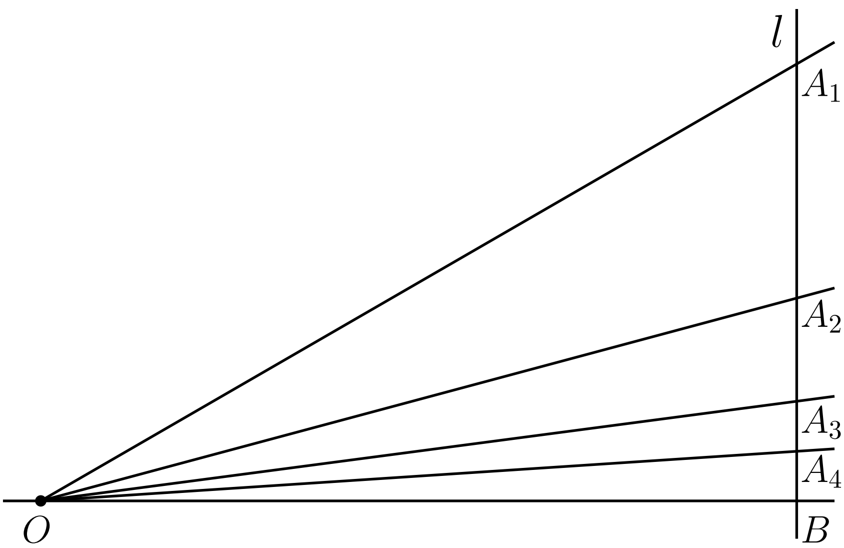

図 3: 二等分線

が成り立ちます．これを三平方の定理を用いて書き換えると

$$\sqrt{A_nB^2+OB^2}:OB=A_nB-A_{n+1}B:A_{n+1}B$$

となります．さらに変形すると

$$\frac{OB}{A_{n+1}B}=\sqrt{\left(\frac{OB}{A_nB}\right)^2+1}+\frac{OB}{A_nB}$$

となります．ここで $s_n=\dfrac{OB}{A_nB}$ とおくと，

$$s_{n+1}=\sqrt{s_n^2+1}+s_n$$

が成り立つことがわかります．また，$\angle A_1OB=30^\circ$ より $s_1=\sqrt{3}$ となります．

さて，$\triangle A_nOB$ は $\angle A_nOB=\dfrac{30}{2^{n-1}}^\circ$，$\angle OBA_n=90^\circ$ の直角三角形ですので，直径 1 の円に内接する正 $3\cdot2^n$ 角形の周の長さを p_n，直径 1 の円に外接する正 $3\cdot2^n$ 角形の周の長さを q_n とすると

$$p_n=\frac{3\cdot2^n}{\sqrt{s_n^2+1}},\qquad q_n=\frac{3\cdot2^n}{s_n}$$

が成り立ちます．

4．具体的な計算

目的とする不等式を示すには，$n=5$ のとき，つまり正 96 角形の場合を考えれば十分です．

まずは下側の $\pi>p_5>3.14$ を示します．

$$\begin{aligned}
s_2&=\sqrt{s_1^2+1}+s_1=2+\sqrt{3}\\
&<2+\sqrt{3.00017041}=2+1.7321=3.7321\\
s_3&=\sqrt{s_2^2+1}+s_2=\sqrt{3.7321^2+1}+3.7321=\sqrt{14.92857041}+3.7321\\
&<\sqrt{14.930496}+3.733=3.864+3.733=7.597\\
s_4&=\sqrt{s_3^2+1}+s_3=\sqrt{7.597^2+1}+7.597=\sqrt{58.714409}+7.597\\
&<\sqrt{58.721569}+7.597=7.663+7.597=15.26\\
s_5&=\sqrt{s_4^2+1}+s_4=\sqrt{15.26^2+1}+15.26=\sqrt{233.8676}+15.26\\
&<\sqrt{233.875849}+15.26=15.293+15.26=30.553\\
\pi&>p_5>\frac{96}{\sqrt{s_5^2+1}}>\frac{96}{\sqrt{30.553^2+1}}=\frac{96}{\sqrt{934.485809}}>\frac{96}{\sqrt{934.5249}}=\frac{96}{30.57}>3.14
\end{aligned}$$

次に上側です．$\pi < q_5 < 3.145$ を示します．

$$
\begin{aligned}
s_2 &= \sqrt{s_1^2+1}+s_1 = 2+\sqrt{3} \\
&> 2+\sqrt{2.999824} = 2+1.732 = 3.732 \\
s_3 &= \sqrt{s_2^2+1}+s_2 = \sqrt{3.732^2+1}+3.732 = \sqrt{14.927824}+3.732 \\
&> \sqrt{14.922769}+3.732 = 3.863+3.732 = 7.595 \\
s_4 &= \sqrt{s_3^2+1}+s_3 = \sqrt{7.595^2+1}+7.595 = \sqrt{58.684025}+7.595 \\
&> \sqrt{58.6756}+7.59 = 7.66+7.59 = 15.25 \\
s_5 &= \sqrt{s_4^2+1}+s_4 = \sqrt{15.25^2+1}+15.25 = \sqrt{233.5625}+15.25 \\
&> \sqrt{233.4784}+15.25 = 15.28+15.25 = 30.53 \\
\pi &< q_5 < \frac{96}{s_5} < \frac{96}{30.53} < 3.145
\end{aligned}
$$

以上より

$$3.14 < \pi < 3.145$$

を示すことができました．

5．補足

2 章で，円周の長さは内接正多角形の周の長さより大きく外接正多角形の周の長さより小さい，すなわち，任意の n で

$$p_n < \pi < q_n$$

が成り立つことを説明しましたが，数学的にはあまり厳密ではありませんでした．そこで，ここでもう少し詳しく説明しておきます（$p_n < \pi$ の方は明らかですが，こちらも一応，式変形で示します）．まず，

$$
\begin{aligned}
s_{n+1}^2 &= (s_n^2+1)+2s_n\sqrt{s_n^2+1}+s_n^2 < (s_n^2+1)+2\sqrt{s_n^2+1}\sqrt{s_n^2+1}+s_n^2 = 4s_n^2+3 \\
s_{n+1} &= \sqrt{s_n^2+1}+s_n > 2s_n
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
p_{n+1}-p_n &= \frac{3\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{s_{n+1}^2+1}} - \frac{3\cdot 2^n}{\sqrt{s_n^2+1}} > \frac{3\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{4s_n^2+3+1}} - \frac{3\cdot 2^n}{\sqrt{s_n^2+1}} = 0 \\
q_{n+1}-q_n &= \frac{3\cdot 2^{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{3\cdot 2^n}{s_n} = \frac{3\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{s_n^2+1}+s_n} - \frac{3\cdot 2^n}{s_n} < \frac{3\cdot 2^{n+1}}{2s_n} - \frac{3\cdot 2^n}{s_n} = 0
\end{aligned}
$$

が成り立ちますので，$\{p_n\}$ が増加数列，$\{q_n\}$ が減少数列となることがわかります．

また，$s_{n+1} > 2s_n$ と $s_1 = \sqrt{3}$ より $s_n > 2^{n-1}\sqrt{3}$ が成り立ちますので，

$$\begin{aligned} q_n - p_n &= \frac{3 \cdot 2^n}{s_n} - \frac{3 \cdot 2^n}{\sqrt{s_n^2+1}} = 3 \cdot 2^n \cdot \frac{\sqrt{s_n^2+1} - s_n}{s_n\sqrt{s_n^2+1}} \\ &= \frac{3 \cdot 2^n}{s_n\sqrt{s_n^2+1}(\sqrt{s_n^2+1}+s_n)} < \frac{3 \cdot 2^n}{2s_n^3} < \frac{1}{2^{2n-2}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となります．つまり，n が大きくなるに従って p_n と q_n の差は限りなく零に近づきます．

さて，そもそも，円周の長さを考えるには曲線の長さを定義しなければなりませんが，曲線の長さは，通常，曲線上にいくつもの点を取って曲線を折れ線で近似し，点の間隔を細かくしていったときの折れ線の長さの総和が限りなく近づく値として定義されます．円周上に n 等分点を取って折れ線で結ぶと，折れ線の長さの和は p_n になりますので，n を大きくしていったときには，p_n は円周の長さ，すなわち π に限りなく近づきます．これと $\{p_n\}$ が増加数列であることから $p_n < \pi$ が言えます．

n が大きくなるとき，p_n と q_n の差は限りなく零に近づきますので，p_n だけでなく q_n も π に限りなく近づきます．これと $\{q_n\}$ が減少数列であることから $q_n > \pi$ が言えます．

極限の記号を用いて示すと，$n < m$ のとき

$$p_n < p_{n+1} \leq p_m, \qquad q_n > q_{n+1} \geq q_m$$

が成り立ちますので，$m \to \infty$ の極限を取ると

$$\begin{aligned} &p_n < p_{n+1} \leq \lim_{m\to\infty} p_m = \pi \\ &q_n > q_{n+1} \geq \lim_{m\to\infty} q_m = \lim_{m\to\infty} (q_m - p_m) + \lim_{m\to\infty} p_m = \pi \end{aligned}$$

となります．