n 次元単体の外接半径に関する再帰公式

小林健太（一橋大学商学研究科）

n 次元単体とは，1 次元の線分，2 次元の三角形，3 次元の四面体などを n 次元に拡張したものです．1 次元単体が線分，2 次元単体が三角形，3 次元単体が四面体になります．n 次元単体の外接球（2 次元の場合は外接円）の半径を外接半径と呼ぶことにします．この外接半径について，なかなか面白い公式を発見しましたので紹介します。この結果は，
K. Kobayashi, A recursive formula for the circumradius of the n-simplex, *Forum Geometricorum* **16** (2016) pp. 179–184
に掲載されています．

n 次元単体 K の外接半径を R，体積を V とし，K を構成する $n+1$ 個の $n-1$ 次元単体（三角形の場合は辺，四面体の場合は三角形）を $K_1 \sim K_{n+1}$ とします．さらに K_i の外接半径を R_i，体積を V_i とし，K_i に対面する頂点と K_i の外接球（外接円）の中心との距離を L_i とします（図 1 参照）．このとき，以下の再帰公式が成り立つことを発見しました．

$$R^2 = \frac{\dfrac{1}{4n^2V^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}(R_i^2 - L_i^2)^2 V_i^4 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}(3R_i^2 - L_i^2)V_i^2 + n^2V^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} V_i^2}$$

n 単体の外接半径が，n 次元単体を構成する $n-1$ 次元単体の外接半径や体積などで表現できることから，再帰公式と名付けました．

この公式については，n が 2 以上 5 以下の場合は Mathematica の数式処理を用いて証明に成功しましたが，一般の n については証明できていません．しかし，50 までの各 n にお

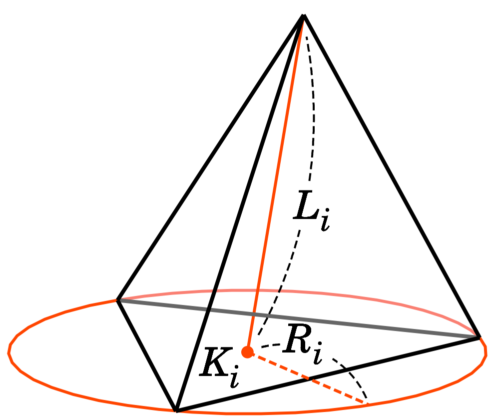

図 1: 3 次元の場合

いて，それぞれ100個のランダムなn単体について成り立つかどうか調べたところ，常に成り立っていましたので，この公式はおそらく任意のnで成り立つのではないかと考えています.

n次元単体の体積と外接半径については，昔から，Cayley-Menger行列を用いた以下の公式が知られています.

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} \det(\widehat{\boldsymbol{A}}), \qquad R^2 = -\frac{\det(\boldsymbol{A})}{2\det(\widehat{\boldsymbol{A}})},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & \cdots & l_{1\,n+1}^2 \\ l_{21}^2 & 0 & l_{23}^2 & \cdots & l_{2\,n+1}^2 \\ l_{31}^2 & l_{32}^2 & 0 & \cdots & l_{3\,n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n+1\,1}^2 & l_{n+1\,2}^2 & l_{n+1\,3}^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

ここで，l_{ij}はi番目の頂点とj番目の頂点の距離を表します．証明については，例えば
H. S. M. Coxeter, The Circumradius of the General Simplex, *The Mathematical Gazette* **15** (1930) No.210 pp. 229–231
などを参照して下さい.

原理的には，この公式を変形していけば，私が発見した再帰公式を任意のnで証明できるのではないかと考えていますが，計算が複雑になり過ぎるため，今のところは成功していません.