「円周率と arctan 型公式」

小林健太

一橋大学商学研究科

1　概略

円周率についての理解を深めることを目的とします.
まず初めに，アルキメデスが発案し，その後長く用いられた，外接および内接多角形による円周率の計算方法を解説します.
次に，円周率を効率的に求める上で代表的な公式である arctan 型公式について，その仕組みなどを解説します．arctan 型公式は微積分や複素数と密接に関係しているので，公式そのものを解説する前に，それらについて説明を行います.
最後に，実際に arctan 型公式を作成して円周率を計算します.

2　円周率の歴史

円というのは最も基本的な図形の一つです．そのため，円の直径と円周の長さの比である円周率は，古くから人々を魅了してきました．以下に，かつてどのような値が円周率として計算されてきたかを記します（年代などについては諸説あるので，厳密に正しいとは限りません）.

紀元前 2000 年頃　バビロニア人　$\pi = 3 + \dfrac{1}{8} = 3.125$

紀元前 1650 年頃　エジプト人　$\pi = 4 \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^2 = 3.16049\cdots$

紀元前 550 年頃　旧約聖書　$\pi = 3$

紀元前 3 世紀　古代ギリシャ　アルキメデス

$$3 + \frac{10}{71} = 3.14085\cdots < \pi < 3 + \frac{1}{7} = 3.14286\cdots$$

130 年　中国　後漢書　$\pi = 3.1622$

264 年　中国　劉徽　$\pi = 3.14159$

380 年　インド人　$\pi = 3 + \dfrac{177}{1250} = 3.1416$

5 世紀後半　中国　祖沖之　$3.1415926 < \pi < 3.1415927$

1202年　イタリア　フィボナッチ　$\pi = \dfrac{864}{275} = 3.141818\cdots$

1579年　フランス　フランソワ・ヴィエト　$3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$

1585年　オランダ　アドリアン・アンソニスゾーン　$\pi = \dfrac{355}{113} = 3.14159292\cdots$

1610年　ドイツ　ルドルフ・フォン・ケーレン　35桁

1699年　イギリス　アブラハム・シャープ　72桁

1706年　イギリス　ジョン・マチン　100桁

1719年　フランス　ド・ラグニィ　127桁

1722年　日本　建部賢弘　42桁

1739年　日本　松永良弼　50桁

1794年　スロベニア　ヴェガ　140桁

1853年　イギリス　ウィリアム・ラザフォード　440桁

1873年　イギリス　ウィリアム・シャンクス　707桁（527桁から先は間違っていた）

手計算による記録はここまでで，以後はコンピュータによる計算の時代に入ります．最近のコンピュータによる計算結果は，

2002年　東京大学　金田康正　1兆2411億桁（計算時間約600時間）

2009年8月　筑波大学　高橋大介 他　2兆5769億8037万桁（計算時間約74時間）

2009年12月　フランス　ファブリス・ベラール　2兆6999億9999万桁（計算時間131日）

最後のベラール氏による記録はパソコンによる計算です．

一方で，円周率の数学的な性質については以下の研究結果があります．

1768年　ドイツ　ヨハン・ハインリッヒ・ランベルト　πは無理数である．
1882年　ドイツ　フェルディナント・フォン・リンデマン　πは超越数である．

超越数というのは，どんな整数係数の代数方程式の根にもならない数のことです．例えば，$\sqrt{2}$は$x^2 - 2 = 0$の根になるので超越数ではありません．

3　アルキメデスによる円周率の求め方

アルキメデスは，円に内接する多角形と円に外接する多角形の周の長さを求めることにより，円周率を計算しました．まずは彼の著書「円の測定について」により，その方法を再現してみることにしましょう．

最初に，アルキメデスは円周の長さと円に内接または外接する多角形の周の長さの関係を考察しています．円に内接する多角形の周の長さが円周よりも小さくなるのは明らかですが，外接する多角形の周の長さが問題です．この部分は写本ではかなり省略されていて簡単な記述しか残っていないのですが，彼の他の著書なども参考にすると，オリジナルの記述は以下のようなものだったと考えられます．

円に外接する任意の多角形を考えます．次に，この多角形の角から三角形（図 1 では ΔABC）を切り取り，円に外接する，より面積の小さい多角形を作ります．こうすると，多角形の周の長さはより短くなります．この操作を繰り返して辺の数を増やしていくと，多角形の周の長さは減少しながら円周の長さに近づいて行きます．よって，円に外接する多角形の周の長さは円周より大きいことがわかります．ただし，これは現代の数学から見ると厳密性には欠ける議論です．

それでは，アルキメデスの方法の中心部分に入ることにしましょう．(次ページの）図 2 のように，直線 OB を引き，B を通り直線 OB と直交する直線を l とします．次に，円の中心から l 上の点 A_1 に直線 OA_1 を引きます．更に，$\angle A_1OB$ の二等分線と l の交点を A_2，$\angle A_2OB$ の二等分線と l の交点を A_3，と順次 $A_3, A_4, \cdots$ を取ります．

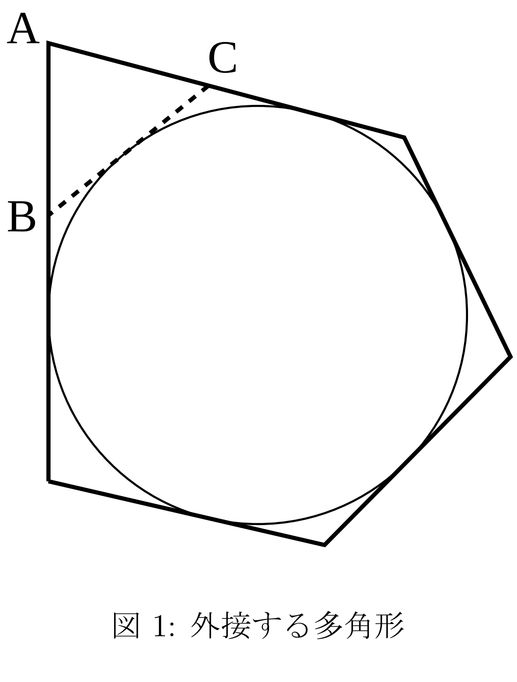

図 1: 外接する多角形

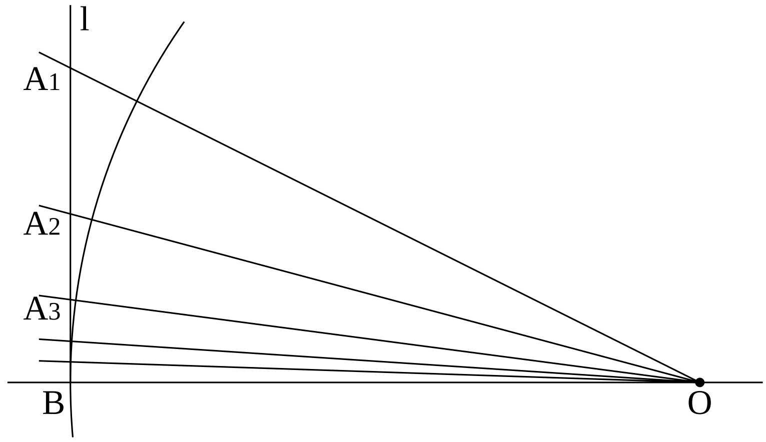

図 2: 二等分線

このとき，二等分線の定理より

$$OA_k : OB = A_kA_{k+1} : A_{k+1}B$$

が成り立ちます．これを三平方の定理を用いて書き換えると

$$\sqrt{OB^2 + A_kB^2} : OB = A_kB - A_{k+1}B : A_{k+1}B$$

となり，これを更に変形すると

$$\frac{OB}{A_{k+1}B} = \sqrt{\left(\frac{OB}{A_kB}\right)^2 + 1} \ + \ \frac{OB}{A_kB}$$

となり，

$$p_k = \frac{OB}{A_kB}$$

と置くと，

$$p_{k+1} = \sqrt{p_k^2 + 1} + p_k$$

が成り立つことがわかります．

以下，$\angle A_1OB$ は 30° に取るとします．このとき，直径 1 の円に外接する正 96 角形の周の長さ，および，直径 1 の円に内接する正 96 角形の周の長さは，それぞれ，

$$\frac{96}{p_5}, \qquad \frac{96}{\sqrt{p_5^2 + 1}}$$

で与えられます．

$\angle A_1OB$ は 30° なので $p_1 = \sqrt{3}$ となります．アルキメデスは平方根を分数で評価していくことにより，厳密に p_5 の下限と上限を求めました．それを以下に再現してみます．

まず,
$$p_1 = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$
が言えます（両辺を二乗して通分することで確かめることができます）．よって，関係式より
$$p_2 = \sqrt{1+3} + \sqrt{3} > 2 + \frac{265}{153} = \frac{571}{153}$$
となることがわかります．同様に，平方根が出てくるたびに，それよりも僅かに小さな分数で置き換えていきます．

$$p_3 > \sqrt{\left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1} + \frac{571}{153} = \frac{\sqrt{349450} + 571}{153} > \frac{1033}{136}$$
$$\left(\sqrt{349450} > \frac{4729}{8}\text{を用いた}\right)$$
$$p_4 > \sqrt{\left(\frac{1033}{136}\right)^2 + 1} + \frac{1033}{136} = \frac{\sqrt{1085585} + 1033}{136} > \frac{9337}{612}$$
$$\left(\sqrt{1085585} > \frac{9377}{9}\text{を用いた}\right)$$
$$p_5 > \sqrt{\left(\frac{9337}{612}\right)^2 + 1} + \frac{9337}{612} = \frac{\sqrt{87554113} + 9337}{612} > \frac{9347}{306}$$
$$\left(\sqrt{87554113} > 9357\text{ を用いた}\right)$$

これにより,
$$\pi < \text{直径 1 の円に外接する 96 角形の周の長さ} = \frac{96}{p_5} < \frac{29376}{9347} < \frac{22}{7}$$
が言えました．

内接円の方は逆に，p_k を上から評価していきます．
$$p_1 = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$
を用いて
$$p_2 = \sqrt{1+3} + \sqrt{3} < 2 + \frac{1351}{780} = \frac{2911}{780}$$
が成り立ち、以下
$$p_3 < \sqrt{\left(\frac{2911}{780}\right)^2 + 1} + \frac{2911}{780} = \frac{\sqrt{9082321} + 2911}{780} < \frac{1823}{240}$$
$$\left(\sqrt{9082321} < \frac{12055}{4}\text{を用いた}\right)$$

$$p_4 < \sqrt{\left(\frac{1823}{240}\right)^2 + 1} + \frac{1823}{240} = \frac{\sqrt{3380929} + 1823}{240} < \frac{1007}{66}$$

$$\left(\sqrt{3380929} < \frac{20227}{11} \text{を用いた}\right)$$

$$p_5 < \sqrt{\left(\frac{1007}{66}\right)^2 + 1} + \frac{1007}{66} = \frac{\sqrt{1018405} + 1007}{66} < \frac{12097}{396}$$

$$\left(\sqrt{1018405} < \frac{6055}{6} \text{を用いた}\right)$$

が得られます．この値により

$$\pi > \text{直径 1 の円に内接する 96 角形の周の長さ} = \frac{96}{\sqrt{p_5^2 + 1}} > \frac{38016}{\sqrt{146494225}}$$

となりますが，

$$\sqrt{146494225} < \frac{24207}{2}$$

が成り立つので，

$$\pi > \frac{38016}{\sqrt{146494225}} > \frac{25344}{8069} > \frac{223}{71}$$

が言えます．

アルキメデスが行った計算が，単なる近似計算ではなく，数学的に厳密な意味で不等式を証明していることは注目に値します．また，この計算が，10 進法による記数法や変数を用いた式の記述法，三角関数などが一切無い時代に為されたことを考えると，驚異的ですらあります．

4 arctan と微分

微積分が発展するまでは，円周率の計算はアルキメデスが行ったのと本質的に同じく，多角形の周の長さを計算することにより求められてきました．1610 年にルドルフ・フォン・ケーレンが π を 35 桁求めた際には，正 32212254720 角形の辺の長さが使われました．その後，円周率の計算は，arctan 型公式が発見されて新しい時代に入ります．

arctan 型公式について理解するには，arctan 関数とその微分，Taylor 展開，複素数の偏角と絶対値の性質，ガウス整数とガウス素数，などについての知識が必要です．それらを順次解説していくことにします．まずはこの章では，arctan 関数とその微分について説明します．

arctan 関数とは，tan 関数の逆関数のことです．グラフに描いてみると，tan のグラフは（次ページ）図 3 のようになり，arctan のグラフは（次ページ）図 4 のようになります．arctan は $\tan^{-1}$ とも書きます．

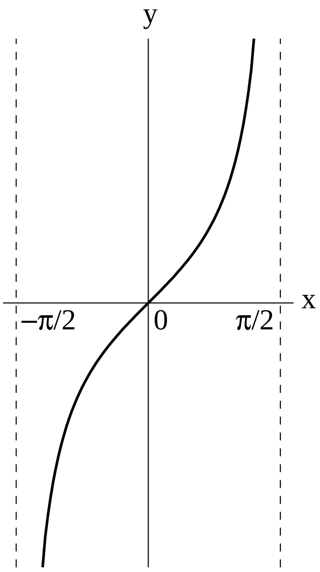

図 3: $y = \tan x$

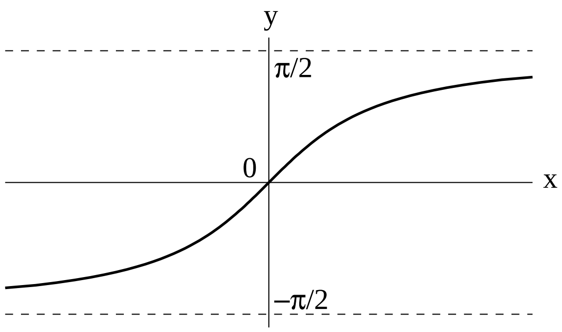

図 4: $y = \arctan x$

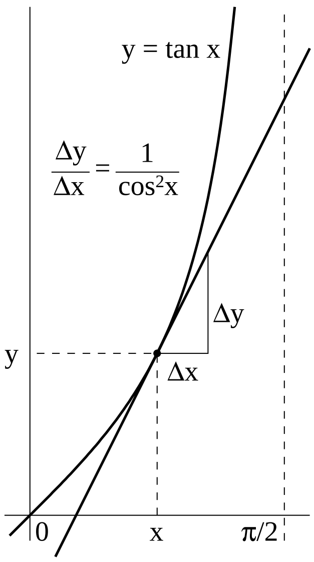

図 5: $y = \tan x$ の微分

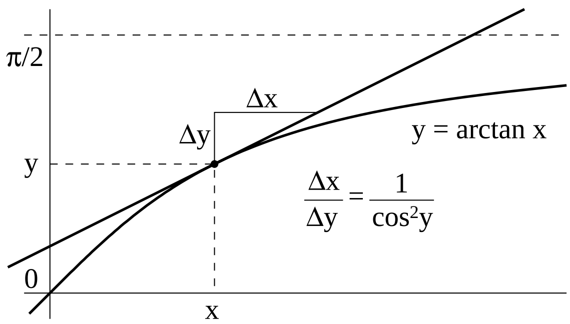

図 6: $y = \arctan x$ の微分

さて，arctan 関数は tan 関数の逆関数ですので，$y = \arctan x$ ならば，$x = \tan y$ という関係が成り立ちます．すなわち，tan のグラフと arctan のグラフは直線 $y = x$ に関して対称な関係にあります.

ここで，$y = \arctan x$ を x で微分したらどうなるか，という問題について考えてみます.

まず，$y = \tan x$ を x で微分すると $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ になることを思い出してください．微分というのは接線の傾きのことであり，傾きというのはこの場合，“ x の増加量分の y の増加量 ” です．つまり，$y = \tan x$ のグラフの (x, y) での接線の，“ x の増加量分の y の増加量 ” は $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるということを意味します (図 5).

よって，$x = \tan y$ のグラフに (x, y) で接線を引くと，その接線の “ y の増加量分の x の増加量 ” は $\dfrac{1}{\cos^2 y}$ になります (図 6).

つまり，$x = \tan y$ すなわち $y = \arctan x$ のグラフに (x, y) で接線を引くと，その接線の “ x の増加量分の y の増加量 ” は $\cos^2 y$ になります．また，

$$\cos^2 y = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

が成り立つので，結局，$y = \arctan x$ を x で微分すると

$$\frac{1}{x^2 + 1}$$

となることがわかります.

虚数単位を i とすると

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right)$$

となるので，$\arctan x$ の高階の微分も求まります．すなわち，$f(x) = \arctan x$ とし，$f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の n 回微分とすると，x^n の微分が nx^{n-1} であることを思い出して，

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right) \\
f^{(2)}(x) &= \frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{(x - i)^2} - \frac{1}{(x + i)^2}\right) \\
f^{(3)}(x) &= \frac{1 \cdot 2}{2i}\left(\frac{1}{(x - i)^3} - \frac{1}{(x + i)^3}\right) \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{2i}\left(\frac{1}{(x - i)^4} - \frac{1}{(x + i)^4}\right) \\
f^{(5)}(x) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2i}\left(\frac{1}{(x - i)^5} - \frac{1}{(x + i)^5}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

つまり

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(x - i)^n} - \frac{1}{(x + i)^n}\right)$$

が成り立ちます.

5 Taylor展開

関数 $f(x)$ を $x=0$ の付近で近似することを考えてみましょう。一番簡単な方法は，$f(x)$ を多項式で近似することです．そこで $f(x)$ の n 次式による近似を

$$g_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

とします．ここで係数 $a_0, a_1, \cdots a_n$ を決めなくてはなりませんが，これは，$g_n(x)$ と $f(x)$ の n 次までの微分が $x=0$ で等しくなるように決めます．すなわち，$x=0$ で 0 次微分，つまり関数値が等しくなるという条件から

$$a_0 = f(0)$$

となり，$x=0$ で k 次微分（$k=1,2,\cdots,n$）が等しくなるという条件から

$$k! a_k = f^{(k)}(0)$$

となります．つまり，$f(x)$ は $x=0$ の付近で

$$g_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

と近似できることが期待できます．例えば

$$f(x) = \sin x$$

に対しては

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= \frac{\sin 0}{0!} = 0 \\
g_1(x) &= \frac{\sin 0}{0!} + \frac{\cos 0}{1!}x = x \\
g_2(x) &= \frac{\sin 0}{0!} + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 = x \\
g_3(x) &= \frac{\sin 0}{0!} + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6} \\
g_4(x) &= \frac{\sin 0}{0!} + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{6} \\
g_5(x) &= \frac{\sin 0}{0!} + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 + \frac{\cos 0}{5!}x^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}
\end{aligned}$$

となり，実際に $f(x)$ と $g_1(x), g_3(x), g_5(x)$ のグラフを描いてみると，確かに $f(x)$ の近似になっていることがわかります（次ページ図 7）．

$g_n(x)$ は n を増やすほど良い近似になるように見えますので，無限に項を足していけば $f(x)$ と等しくなるように思えます．つまり，

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

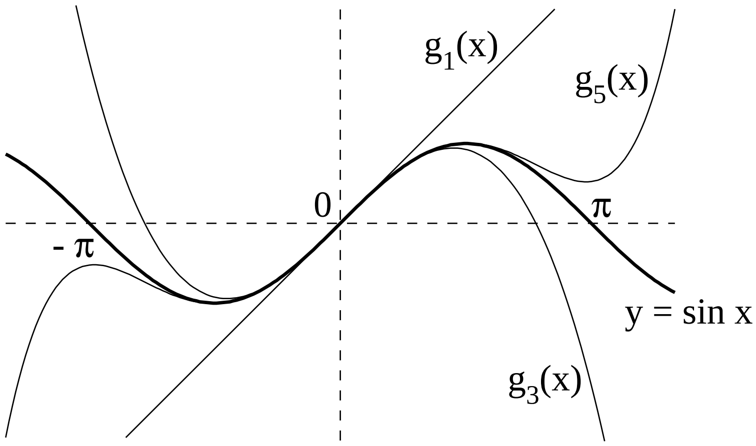

図 7: $f(x) = \sin x$ と $g_1(x), g_3(x), g_5(x)$

が成り立つと期待できます．この展開を $f(x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開と呼びます．

実際は，Taylor 展開と元の関数は常に等しくなるとは限りません．例えば

$$f(x) = \log(x+1)$$

とすると，

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{-1!}{(x+1)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2!}{(x+1)^3}, \cdots,$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}, \cdots$$

が成り立つので，

$$\log(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

と Taylor 展開されます．しかし右辺は $x \leq -1$ もしくは $x > 1$ のときには発散してしまい，値が収束しません．一方で，$-1 < x \leq 1$ のときには収束して両辺は等しくなります．この例でもわかる通り，関数を Taylor 展開した場合には，それがどの x の範囲で元の関数と等しくなるか吟味が必要になります．

さて，ここからは arctan 関数の Taylor 展開を考えます．

$$f(x) = \arctan x$$

とすると

$$f(0) = 0$$

となり，また既に見たように，$n \geq 1$ に対して

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right)$$

が成り立つので，

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(-i)^n} - \frac{1}{(i)^n}\right)$$

が言えます．n が偶数のときには

$$\frac{1}{(-i)^n} - \frac{1}{(i)^n} = 0$$

となるので $f^{(n)}(0) = 0$ となり，n が奇数のときには $n = 2m+1$ と置いて

$$\begin{aligned} f^{(2m+1)}(0) &= \frac{(2m)!}{2i}\left(\frac{1}{(-i)^{2m+1}} - \frac{1}{(i)^{2m+1}}\right) \\ &= \frac{(2m)!}{2i}\left(\frac{1}{(-1)^m(-i)} - \frac{1}{(-1)^m i}\right) = (2m)!(-1)^m \end{aligned}$$

となります．よって，$\arctan x$ は

$$\arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

と Taylor 展開できることになります．この展開が成り立つ範囲を調べると，$-1 \leq x \leq 1$ で Taylor 展開は収束し，右辺と左辺が等しくなることがわかります．この級数はグレゴリー・ライプニッツ級数と言われ，スコットランドのグレゴリーが 1671 年に，ドイツのライプニッツが 1674 年に，それぞれ独立に発見したものです．

ここで

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

であることを用いると，

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

という関係式が成り立つことがわかります．しかしこの関係式は，実際に円周率を計算する上ではあまり役に立ちません．

$$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{1000001}\right)$$

まで計算しても，$3.141594653\cdots$ と，6 桁しか合致しません．

グレゴリー・ライプニッツ級数，すなわち arctan 関数の Taylor 展開は，後でまた出てきます．

6　複素数の偏角と絶対値の性質

全ての複素数は，$r \geq 0$ と θ を用いて，

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表すことができます．いま

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とするとき，r を α の絶対値，θ を α の偏角といいます（図 8）．

ここで，一つの複素数に対して絶対値の取り方は一つに決まりますが，偏角の取り方は何通りもあることに注意して下さい．$\alpha = 0$ なら $r = 0$ ですが，θ の値は任意に取れます．また，$\alpha \neq 0$ の場合は，θ を α の偏角とすると，$\theta + 2n\pi$ (n は任意の整数) も α の偏角になります．

複素数 α の絶対値を $|\alpha|$，偏角を $\arg\alpha$ と書きます．

いま，複素数 α_1 の絶対値と偏角をそれぞれ r_1，θ_1 とし，複素数 α_2 の絶対値と偏角をそれぞれ r_2，θ_2 とします．このとき，加法定理より

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2\Big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\Big) \\
&= r_1r_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big)
\end{aligned}$$

が成り立ちます．すなわち，

$$\begin{aligned}
|\alpha_1\alpha_2| &= |\alpha_1|\,|\alpha_2| \\
\arg(\alpha_1\alpha_2) &= \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + 2n\pi \quad (n \text{ は任意の整数})
\end{aligned}$$

が言えることがわかります．3 つ以上の複素数の積の場合も同様に，積の絶対値はそれぞれの絶対値の積に，積の偏角はそれぞれの偏角の和になります．

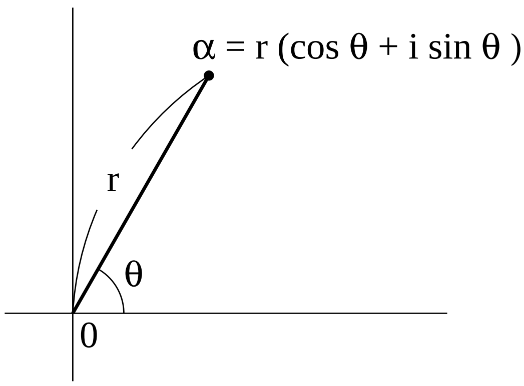

図 8: 偏角と絶対値

7 arctan 型公式

1706 年に，ジョン・マチンは

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

という公式を発見しました．現在ではこの公式はマチンの公式と呼ばれています.

$\arctan\dfrac{1}{5}$ と $\arctan\dfrac{1}{239}$ は，グレゴリー・ライプニッツ級数を用いることにより

$$\arctan\frac{1}{5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}, \qquad \arctan\frac{1}{239} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

と展開することができます．この級数は指数関数的に減少するので，実際の計算でも効率良く値を計算することができます．実際に，マチンはこの展開式を用いて，円周率を 100 桁まで計算しました.

まずは，マチンの公式を証明してみましょう.

最初に，任意の自然数 n に対して $n+i$ の偏角が $\arctan\dfrac{1}{n}$，$n-i$ の偏角が $-\arctan\dfrac{1}{n}$ で与えられることに注意しておきます（図 9）.
さて，$5+i$ と $239-i$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} 5+i &= (1+i)(3-2i) \\ 239-i &= -i(1-i)(3+2i)^4 \end{aligned}$$

と分解できます．よって

$$(5+i)^4(239-i) = (1+i)^4(3-2i)^4(-i)(1-i)(3+2i)^4 = -i(1+i)^3(1^2+1^2)(3^2+2^2)^4$$

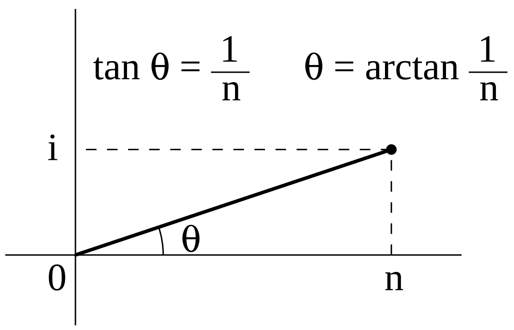

図 9: $\arg(n+i) = \arctan 1/n$

となり，両辺の偏角を考えると，偏角の性質より

$$\begin{aligned}4\arg(5+i)+\arg(239-i) &= \arg(-i)+3\arg(1+i)\\ &= -\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}+2n\pi\\ &= \frac{\pi}{4}+2n\pi\end{aligned}$$

が成り立ちます．ここで n は，ある整数となります．すなわち

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$$

となります.

ここで整数 n の値を求めなくてはなりませんので，次の不等式を使います.

$$x-\frac{x^3}{3}\leq\arctan x\leq x \qquad (\text{ただし } x\geq 0).$$

この不等式を用いると

$$4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}\right)-\frac{1}{239}\leq\frac{\pi}{4}+2n\pi\leq\frac{4}{5}-\frac{1}{239}+\frac{1}{3\cdot 239^3}$$

となりますが,

$$4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}\right)-\frac{1}{239}>4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{100}\right)-\frac{1}{100}=\frac{75}{100}$$

と

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{239}+\frac{1}{3\cdot 239^3}<\frac{4}{5}-0+\frac{1}{100}=\frac{81}{100}$$

より,

$$\frac{75}{100}\leq\frac{\pi}{4}+2n\pi\leq\frac{81}{100}$$

となるので，n は 0 であることがわかります（ここの不等式はかなり大雑把に評価しても大丈夫です）.

結局，これでマチンの公式

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

を証明することができました.

マチンの公式のような，arctan 関数を組み合わせて円周率を表す公式を，arctan 型公式といいます．マチンの公式の他にも次のようなものが知られています.

$$8\arctan\frac{1}{10}-\arctan\frac{1}{239}-4\arctan\frac{1}{515}=\frac{\pi}{4} \qquad \text{(1730 年　クリンジェンシェルナ)}$$

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4} \qquad \text{(1748 年　オイラー)}$$

$$2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4} \qquad \text{(1776 年　ハットン)}$$

$$2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4} \qquad \text{(同上)}$$

$$12\arctan\frac{1}{18}+8\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4} \qquad \text{(1863 年　ガウス)}$$

$$6\arctan\frac{1}{8}+2\arctan\frac{1}{57}+\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4} \qquad \text{(1896 年　ストーマー)}$$

$$44\arctan\frac{1}{57}+7\arctan\frac{1}{239}-12\arctan\frac{1}{682}+24\arctan\frac{1}{12943}=\frac{\pi}{4}$$

(同上)

これらは，マチンの公式を証明したのと同様にして証明することができます．実際に円周率を計算する上では，公式に出てくる $\arctan\dfrac{1}{n}$ の n の値が大きいほど級数が急速に減少するので，計算がやり易くなります．良い arctan 型公式は 19 世紀くらいまでにあらかた発見されてしまいましたが，現在でもいくつか見つかっています．

神奈川県立高等学校教諭の高野喜久雄は 1983 年に

$$12\arctan\frac{1}{49}+32\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}+12\arctan\frac{1}{110443}=\frac{\pi}{4}$$

を発見しました．この公式は高野喜久雄の公式と呼ばれており，2002 年に東京大学の金田康正が円周率を 1 兆 2411 億 7730 万桁計算した際に用いられました．高野喜久雄の公式は，当時発見されていた arctan 型公式のなかで特に効率的であるというわけではありませんでしたが，同じ日本人の発見した公式を使いたいという気持ちがあったのかもしれません．

詳しい説明は省きますが，

$$a_1\arctan\frac{1}{b_1}+a_2\arctan\frac{1}{b_2}+\cdots+a_n\arctan\frac{1}{b_n}$$

という形の arctan 型公式を用いて円周率を計算するのに必要な計算量は，求めたい桁数に比例し，比例定数はおおよそ $Q=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\log_{10}b_k}$ となります．現在知られている arctan 型公式で最も Q が小さくなるものは，1997 年にファン（韓国）によって発見された

$$\begin{aligned}183\arctan\frac{1}{239}&+32\arctan\frac{1}{1023}-68\arctan\frac{1}{5832}\\&+12\arctan\frac{1}{110443}-12\arctan\frac{1}{4841182}-100\arctan\frac{1}{6826318}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となっています．

8　電卓による円周率の計算

実際にマチンの公式を用いて円周率を計算してみましょう．計算には電卓を用います．電卓の表示桁数に合わせて，小数点以下 9 桁もしくは 11 桁まで計算します．

$\frac{1}{5^1}$		$\frac{1}{1\cdot 5^1}$	
$\frac{1}{5^3}$		$\frac{1}{3\cdot 5^3}$	
$\frac{1}{5^5}$		$\frac{1}{5\cdot 5^5}$	
$\frac{1}{5^7}$		$\frac{1}{7\cdot 5^7}$	
$\frac{1}{5^9}$		$\frac{1}{9\cdot 5^9}$	
$\frac{1}{5^{11}}$		$\frac{1}{11\cdot 5^{11}}$	
$\frac{1}{5^{13}}$		$\frac{1}{13\cdot 5^{13}}$	
$\frac{1}{5^{15}}$		$\frac{1}{15\cdot 5^{15}}$	
$\frac{1}{5^{17}}$		$\frac{1}{17\cdot 5^{17}}$	
$\arctan\frac{1}{5}$			

$\frac{1}{239^1}$		$\frac{1}{1\cdot 239^1}$	
$\frac{1}{239^3}$		$\frac{1}{3\cdot 239^3}$	
$\frac{1}{239^5}$		$\frac{1}{5\cdot 239^5}$	
$\arctan\frac{1}{239}$			

π	

今までの説明で，マチンの公式

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

や高野喜久雄の公式

$$12\arctan\frac{1}{49}+32\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}+12\arctan\frac{1}{110443}=\frac{\pi}{4}$$

を証明することはできるようになりました．しかし，arctan 型公式を自分で見つけるためには，もう少し知識が必要です．以下では，まずガウス整数とガウス素数について説明し，それを元に arctan 型公式の見つけ方の実際例を示します．

9　ガウス整数とガウス素数

整数 p, q を用いて，$p+iq$ と表される複素数を，ガウス整数と言います．普通の整数はガウス整数でもありますし，

$$3i,\quad 1-i,\quad 0,\quad -3-7i$$

などもガウス整数です．

ガウス整数のうち

$$1,\quad i,\quad -1,\quad -i$$

の 4 つを単数といいます．

さらに，ある複素数に単数を掛けて得られる複素数を，元の複素数の同伴であるといいます．例えば，複素数 $p+qi$ の同伴は

$$p+qi,\quad -q+pi,\quad -p-qi,\quad q-pi$$

の 4 つとなります．

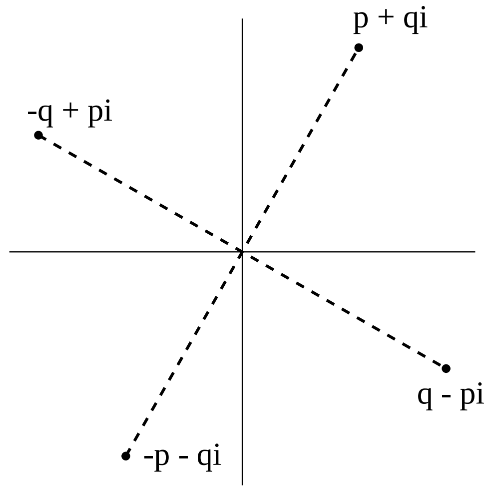

図 10: 互いに同伴な複素数

互いに同伴な4つの複素数は，複素平面上で90°ずつ回転させた位置にあるので（図10），そのうちの一つの複素数は，偏角が$-\pi/4$より大きく$\pi/4$以下となります.

ガウス整数は，普通の整数を複素数に拡張したものと考えることができます．普通の整数で± 1にあたるものが，ガウス整数では単数になります.

ガウス整数にも，普通の整数の素数にあたるものがあります．ガウス整数のうち，自分自身の同伴と単数しか約数を持たないものを，ガウス素数といいます．例えば，$3+4i$や2は

$$3+4i=-(1-2i)^2, \qquad 2=(1+i)(1-i)$$

と因数分解できるのでガウス素数ではありませんが，$1-2i$や$1+i$はこれ以上分解できないのでガウス素数となります.

arctan型公式を作成するには，ガウス整数をガウス素数の積に因数分解することが必要になりますので，その方法について説明します.

まず，次の定理（フェルマーの二平方和定理）が知られています.

「2もしくは$4n+1$型の素数は二つの平方数の和で一通りに表される」

つまり，2もしくは$4n+1$型の素数はa^2+b^2と書け，ガウス整数の世界では更に

$$(a+bi)(a-bi)$$

と因数分解されることになります．一方で，4の剰余で考えると，$4n+3$型の素数は二つの平方数の和では表されず，$4n+3$型の素数はガウス整数の世界でも素数となります.

次に，ガウス整数$p+qi$がガウス整数$a+bi$で割り切れたとします．このとき，商を$c+di$とすると

$$p+qi=(a+bi)(c+di)$$

となります．ここで共役を取ると

$$p-qi=(a-bi)(c-di)$$

も成り立ちます．よって

$$p^2+q^2=(p+qi)(p-qi)=(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

が成り立ちます．つまり，ガウス整数$p+qi$がガウス整数$a+bi$で割り切れるときには，p^2+q^2がa^2+b^2で割り切れることになります.

以上の結果を利用して，ガウス整数を因数分解するために次のような方法が考えられます.

1． 実部と虚部が共通因数を持つなど，すぐにわかる分解は先にやっておく.

2． 2 や $4n+1$ 型の素数は $(a+bi)(a-bi)$ と分解できる.

3． $p+qi$ の因数を探すには，まず p^2+q^2 の因数を探す．p^2+q^2 が素数ならば，もうそれ以上は分解できない．p^2+q^2 が 2 もしくは $4n+1$ 型の素数を因数に持つなら，それを a^2+b^2 と表すと，$a+bi$ か $a-bi$ が $p+qi$ の約数となる.

ともかく，実際にやってみましょう．例として，$3710+560i$ をガウス整数の範囲で因数分解してみます.

まず，実部と虚部から共通因数をくくり出して，

$$3710+560i = 2\cdot 5\cdot 7\cdot (53+8i)$$

となります．7 は $4n+3$ 型の素数なのでこれ以上は分解できません．一方で，5 は $4n+1$ 型の素数なので $5=2^2+1^2$ より $5=(2+i)(2-i)$ と分解できます．2 も $(1+i)(1-i)$ と分解できます．そこでひとまず

$$3710+560i = 7(1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(53+8i)$$

と分解できます.

次に $53+8i$ ですが，$53^2+8^2=2873=13^2\cdot 17$ となり，$13=3^2+2^2$，$17=4^2+1^2$ と書けるので，$3+2i$ か $3-2i$ で 2 回，$4+i$ か $4-i$ で 1 回，割れることになります．実際に割れるか試してみると

$$\frac{53+8i}{3+2i} = \frac{(53+8i)(3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{175-82i}{13}$$

となって $3+2i$ では割れず，

$$\frac{53+8i}{3-2i} = \frac{(53+8i)(3+2i)}{3^2+2^2} = \frac{143+130i}{13} = 11+10i$$

となるので

$$53+8i = (3-2i)(11+10i)$$

と分解できます．$11+10i$ は $3+2i$ か $3-2i$ でもう一回割れる筈ですが，$3+2i$ では割れないことは既に確かめたので，

$$\frac{11+10i}{3-2i} = \frac{(11+10i)(3+2i)}{3^2+2^2} = \frac{13+52i}{13} = 1+4i$$

となります．結局

$$3710+560i = 7(1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(3-2i)^2(1+4i)$$

と分解されることになります．分解できたら，一応，これ以上分解できないことを確かめておきます．7 は $4n+3$ 型の素数なのでこれ以上分解はできなません．また，$1+i$, $1-i$, $2+i$, $2-i$, $3-2i$, $1+4i$ は，実部の 2 乗と虚部の 2 乗を足すと 2 か $4n+1$ 型の素数になるので，これらもこれ以上は分解できません．

ここで，$53+8i$ は $4+i$ か $4-i$ で割れる筈なのに $1+4i$ で割れていることに疑問を持つ方もいるかもしれません．しかし $1+4i$ は $4-i$ の同伴で，$1+4i=i(4-i)$ と表されるので，問題はありません．

実は，任意のガウス整数は，ガウス素数の積に一意的に分解することができることが知られています．ただし，積の順序を入れ替えたものや，ガウス素数の同伴の違いしかないものは同一の分解と解釈します．よって，どのような手順で分解しても，分解は同一になります．

分解する際，単数と，偏角が $-\pi/4$ より大きく $\pi/4$ 以下であるようなガウス素数だけで分解し，絶対値の小さなものから並べれば，順序や同伴に関しても同一の分解になります．例えば，$3710+560i$ は $1-i=-i(1+i)$，$1+4i=i(4-i)$ となるので

$$3710+560i=7(1+i)^2(2+i)(2-i)(3-2i)^2(4-i)$$

と一意的に分解されます．

10 arctan 型公式の見つけ方

マチンの公式の証明を見るとわかる通り，$n \pm i$ という形の複素数を上手く掛け合わせて，偏角が $\pm k\pi/4$ となる複素数を作ることができれば，arctan 型公式を作ることができます（ただし $k=0$ の場合は公式になりません）．

後の付録に，$2 \pm i$ から $10000 \pm i$ のうち，絶対値が 10 以下の複素数だけを素因数として持つものをリストアップしました．これを用いて公式を作成してみましょう．

まず，同じ素因数を持つものをいくつか選びます．素因数の種類が多いほど多く選ばないと上手く行きません．共役も一緒に選んでおきます．例えば，$2 \pm i, 3 \pm 2i, 5 \pm 4i$ を因数に持つものだけを以下のように選んだとします．

$$\begin{aligned}
2+i &= 2+i \\
2-i &= 2-i \\
3+i &= (1+i)(2-i) \\
3-i &= (1-i)(2+i) \\
5+i &= (1+i)(3-2i) \\
5-i &= (1-i)(3+2i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
7+i &= -i(1+i)(2+i)^2 \\
7-i &= i(1-i)(2-i)^2 \\
8+i &= (2-i)(3+2i) \\
8-i &= (2+i)(3-2i) \\
9+i &= (1+i)(5-4i) \\
9-i &= (1-i)(5+4i) \\
18+i &= i(2-i)^2(3-2i) \\
18-i &= -i(2+i)^2(3+2i) \\
32+i &= -i(2+i)^2(5+4i) \\
32-i &= i(2-i)^2(5-4i) \\
57+i &= -i(1+i)(2+i)^3(3-2i) \\
57-i &= i(1-i)(2-i)^3(3+2i) \\
73+i &= -i(1+i)(2-i)(3+2i)(5+4i) \\
73-i &= i(1-i)(2+i)(3-2i)(5-4i) \\
239+i &= i(1+i)(3-2i)^4 \\
239-i &= -i(1-i)(3+2i)^4 \\
2943+i &= i(1+i)(2-i)^4(3-2i)^2(5+4i) \\
2943-i &= -i(1-i)(2+i)^4(3+2i)^2(5-4i)
\end{aligned}
$$

次に，これを組み合わせて，偏角が $\pm k\pi/4$ となる複素数を作ります．ただし，実際に円周率の計算に用いることを考えると，出来るだけリストの上の方のものは使わないようにします．

上のリストの中から例えば $18\pm i, 57\pm i, 73\pm i, 2943\pm i$ の 4 つを選んだとして先に進みます．

$$(18\pm i)^{|a_1|}(57\pm i)^{|a_2|}(73\pm i)^{|a_3|}(2943\pm i)^{|a_4|}$$

と置いて，偏角のわからないガウス素数が共役同士でうまく打ち消されるように $a_1,\cdots,a_4$ を決めます．ただし，$\pm$ の符号は，a_k が正のときにはプラスに，a_k が負のときにはマイナスに取るとします．ここで素因数 $2\pm i, 3\pm 2i, 5\pm 4i$ に着目すると，

$$
\begin{cases}
-2a_1+3a_2-a_3-4a_4=0 \\
-a_1-a_2+a_3-2a_4=0 \\
a_3+a_4=0
\end{cases}
$$

が成り立てば良いということがわかります．この連立一次方程式は，式の数より未知数の

数の方が多いので無数の解を持ちます．代入して解いて行くと

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{a_4}{5} \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となりますので，$a_1, \cdots, a_4$ を整数に取るには，$a_1 = 12, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = -5$ と取ればよいことがわかります．実際，

$$\begin{aligned}
&(18+i)^{12}(57+i)^3(73+i)^5(2943-i)^5 \\
&\quad = i^{12}(2-i)^{24}(3-2i)^{12} \\
&\qquad \times (-i)^3(1+i)^3(2+i)^9(3-2i)^3 \\
&\qquad\quad \times (-i)^5(1+i)^5(2-i)^5(3+2i)^5(5+4i)^5 \\
&\qquad\qquad \times (-i)^5(1-i)^5(2+i)^{20}(3+2i)^{10}(5-4i)^5 \\
&\quad = -i^{25}(1+i)^3(1^2+1^2)^5(2^2+1^2)^{29}(3^2+2^2)^{15}(5^2+4^2)^5 \\
&\quad = -i(1+i)^3(1^2+1^2)^5(2^2+1^2)^{29}(3^2+2^2)^{15}(5^2+4^2)^5
\end{aligned}$$

となり，両辺の偏角を考えると，n を整数として

$$\begin{aligned}
&12\arg(18+i) + 3\arg(57+i) + 5\arg(73+i) + 5\arg(2943-i) \\
&\quad = \arg(-i) + 3\arg(1+i) \\
&\quad = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi
\end{aligned}$$

が成り立ちます．すなわち

$$12\arctan\frac{1}{18} + 3\arctan\frac{1}{57} + 5\arctan\frac{1}{73} - 5\arctan\frac{1}{2943} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

となります．整数 n の値を求めるため，不等式

$$x - \frac{x^3}{3} \le \arctan x \le x \qquad (\text{ただし}\, x \ge 0).$$

を使うと，

$$\begin{aligned}
&12\arctan\frac{1}{18} + 3\arctan\frac{1}{57} + 5\arctan\frac{1}{73} - 5\arctan\frac{1}{2943} \\
&\quad \ge \frac{12}{18} - \frac{12}{3\cdot 18^3} + \frac{3}{57} - \frac{3}{3\cdot 57^3} + \frac{5}{73} - \frac{5}{3\cdot 73^3} - \frac{5}{2943} \\
&\quad \ge \frac{1}{2} - \frac{12}{100} + \frac{3}{100} - \frac{3}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \\
&\quad = \frac{33}{100}
\end{aligned}$$

と

$$
\begin{aligned}
&12\arctan\frac{1}{18}+3\arctan\frac{1}{57}+5\arctan\frac{1}{73}-5\arctan\frac{1}{2943}\\
&\qquad\le\frac{12}{18}+\frac{3}{57}+\frac{5}{73}-\frac{5}{2943}+\frac{5}{3\cdot 2943^3}\\
&\qquad\le 1+\frac{3}{50}+\frac{5}{50}-0+\frac{5}{100}\\
&\qquad\le\frac{121}{100}
\end{aligned}
$$

が得られます．よって，

$$
\frac{33}{100}\le\frac{\pi}{4}+2n\pi\le\frac{121}{100}
$$

より，$n=0$ がわかり，

$$
12\arctan\frac{1}{18}+3\arctan\frac{1}{57}+5\arctan\frac{1}{73}-5\arctan\frac{1}{2943}=\frac{\pi}{4}
$$

が成り立つことが確かめられました．

組み合わせによっては上手く行かないこともあります．例えば $57\pm i, 73\pm i, 239\pm i, 2943\pm i$ を選んだとすると，

$$
(57\pm i)^{|a_1|}(73\pm i)^{|a_2|}(239\pm i)^{|a_3|}(2943\pm i)^{|a_4|}
$$

と置いて，素因数 $2\pm i, 3\pm 2i, 5\pm 4i$ に着目すると

$$
\begin{cases}
3a_1-a_2 \qquad\qquad -4a_4=0\\
-a_1+a_2-4a_3-2a_4=0\\
\qquad\qquad\qquad a_2 \;\; +a_4=0
\end{cases}
$$

が成り立てば良いということになります．これを解くと

$$
\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=a_4\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}
$$

となりますので，$a_1=1, a_2=-1, a_3=-1, a_4=1$ を用いると

$$
\begin{aligned}
&(57+i)(73-i)(239-i)(2943+i)\\
&\qquad=(-i)(1+i)(2+i)^3(3-2i)\\
&\qquad\qquad\times i(1-i)(2+i)(3-2i)(5-4i)\\
&\qquad\qquad\qquad\times(-i)(1-i)(3+2i)^4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times i(1+i)(2-i)^4(3-2i)^2(5+4i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= i^4(1^2+1^2)^2(2^2+1^2)^4(3^2+2^2)^4(5^2+4^2) \\
&= (1^2+1^2)^2(2^2+1^2)^4(3^2+2^2)^4(5^2+4^2)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，両辺の偏角を考えると，n を整数として

$$
\arctan\frac{1}{57} - \arctan\frac{1}{73} + \arctan\frac{1}{239} - \arctan\frac{1}{2943} = 2n\pi
$$

が得られます．しかし，不等式を利用して n の値を求めると $n=0$ となってしまいますので，π を表す公式にはなりません．

もう一例，やってみます．今度は $2\pm i, 5\pm 2i, 9\pm 4i$ を因数に持つものを以下のように選びました．

$$
\begin{aligned}
2+i &= 2+i \\
2-i &= 2-i \\
3+i &= (1+i)(2-i) \\
3-i &= (1-i)(2+i) \\
12+i &= (2+i)(5-2i) \\
12-i &= (2-i)(5+2i) \\
17+i &= -i(1+i)(2+i)(5+2i) \\
17-i &= i(1-i)(2-i)(5-2i) \\
22+i &= (2+i)(9-4i) \\
22-i &= (2-i)(9+4i) \\
41+i &= (1+i)(5-2i)^2 \\
41-i &= (1-i)(5+2i)^2 \\
75+i &= -i(1+i)(5+2i)(9+4i) \\
75-i &= i(1-i)(5-2i)(9-4i) \\
4193+i &= i(1+i)(2-i)^5(5+2i)(9-4i) \\
4193-i &= -i(1-i)(2+i)^5(5-2i)(9+4i)
\end{aligned}
$$

これを組み合わせて，偏角が $\pm k\pi/4$ となる複素数を作ります．色々と組み合わせを試し，先ほどと同様に連立一次方程式を解いてみると，例えば

$$
\begin{aligned}
&(22+i)^{10}(41+i)^{7}(75+i)^{12}(4193+i)^{2}\\
&\qquad = (2+i)^{10}(9-4i)^{10}\\
&\qquad\qquad \times (1+i)^{7}(5-2i)^{14}\\
&\qquad\qquad\qquad \times (-i)^{12}(1+i)^{12}(5+2i)^{12}(9+4i)^{12}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times i^{2}(1+i)^{2}(2-i)^{10}(5+2i)^{2}(9-4i)^{2}\\
&\qquad = i^{14}(1+i)^{21}(2^2+1^2)^{10}(5^2+2^2)^{14}(9^2+4^2)^{12}\\
&\qquad = -(1+i)^{21}(2^2+1^2)^{10}(5^2+2^2)^{14}(9^2+4^2)^{12}
\end{aligned}
$$

が見つかります．ここで両辺の偏角を考えると，n を整数として

$$
\begin{aligned}
&10\arg(22+i)+7\arg(41+i)+12\arg(75+i)+2\arg(4193+i)\\
&\qquad = \arg(-1)+21\arg(1+i)\\
&\qquad = -\pi+\frac{21\pi}{4}+2n\pi\\
&\qquad = \frac{17\pi}{4}+2n\pi
\end{aligned}
$$

が成り立ちます．すなわち

$$
10\arctan\frac{1}{22}+7\arctan\frac{1}{41}+12\arctan\frac{1}{75}+2\arctan\frac{1}{4193}=\frac{17\pi}{4}+2n\pi
$$

となります．整数 n の値を求めるため，同様に不等式

$$
x-\frac{x^3}{3}\le\arctan x\le x \qquad (\text{ただし } x\ge 0).
$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
&10\arctan\frac{1}{22}+7\arctan\frac{1}{41}+12\arctan\frac{1}{75}+2\arctan\frac{1}{4193}\\
&\qquad \ge \frac{10}{22}-\frac{10}{3\cdot 22^3}+\frac{7}{41}-\frac{7}{3\cdot 41^3}+\frac{12}{75}-\frac{12}{3\cdot 75^3}+\frac{2}{4193}-\frac{2}{3\cdot 4193^3}\\
&\qquad \ge \frac{10}{50}-\frac{10}{100}+\frac{7}{50}-\frac{7}{100}+\frac{12}{100}-\frac{12}{100}+0-\frac{1}{100}\\
&\qquad = \frac{16}{100}
\end{aligned}
$$

と

$$
\begin{aligned}
&10\arctan\frac{1}{22}+7\arctan\frac{1}{41}+12\arctan\frac{1}{75}+2\arctan\frac{1}{4193}\\
&\qquad \le \frac{10}{22}+\frac{7}{41}+\frac{12}{75}+\frac{2}{4193}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{10}{20} + \frac{7}{25} + \frac{12}{50} + \frac{1}{100} \\
&\leq \frac{103}{100}
\end{aligned}
$$

が得られます．よって，

$$\frac{16}{100} \leq \frac{17\pi}{4} + 2n\pi \leq \frac{103}{100}$$

より，$n = -2$ がわかり

$$10\arctan\frac{1}{22} + 7\arctan\frac{1}{41} + 12\arctan\frac{1}{75} + 2\arctan\frac{1}{4193} = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つことが確かめられます．

補足１　今まで出てきた arctan 型公式は全て，$\cdots = \dfrac{\pi}{4}$ という形をしています．しかし全ての公式がこの形をしているわけではありません．例えば

$$12\arctan\frac{1}{3} + 4\arctan\frac{1}{57} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{5\pi}{4}$$

という公式があります．

補足２　上では

$$\cdots = \frac{k\pi}{4} + 2n\pi$$

という公式を得た後，n の値を確定するのに不等式を用いて厳密に証明していますが，実際には計算機を用いてある程度の精度まで計算してみれば n の値はわかります．

11　付録

$$
\begin{aligned}
1+i &= 1+i \\
1-i &= 1-i \\
2+i &= 2+i \\
2-i &= 2-i \\
3+i &= (1+i)(2-i) \\
3-i &= (1-i)(2+i) \\
4+i &= 4+i \\
4-i &= 4-i \\
5+i &= (1+i)(3-2i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5-i &= (1-i)(3+2i)\\
6+i &= 6+i\\
6-i &= 6-i\\
7+i &= -i(1+i)(2+i)^2\\
7-i &= i(1-i)(2-i)^2\\
8+i &= (2-i)(3+2i)\\
8-i &= (2+i)(3-2i)\\
9+i &= (1+i)(5-4i)\\
9-i &= (1-i)(5+4i)\\
11+i &= (1+i)(6-5i)\\
11-i &= (1-i)(6+5i)\\
12+i &= (2+i)(5-2i)\\
12-i &= (2-i)(5+2i)\\
13+i &= (1+i)(2-i)(4-i)\\
13-i &= (1-i)(2+i)(4+i)\\
17+i &= -i(1+i)(2+i)(5+2i)\\
17-i &= i(1-i)(2-i)(5-2i)\\
18+i &= i(2-i)^2(3-2i)\\
18-i &= -i(2+i)^2(3+2i)\\
21+i &= -i(1+i)(3+2i)(4+i)\\
21-i &= i(1-i)(3-2i)(4-i)\\
22+i &= (2+i)(9-4i)\\
22-i &= (2-i)(9+4i)\\
23+i &= (1+i)(2-i)(7-2i)\\
23-i &= (1-i)(2+i)(7+2i)\\
27+i &= -i(1+i)(2+i)(8+3i)\\
27-i &= i(1-i)(2-i)(8-3i)\\
30+i &= (4-i)(7+2i)\\
30-i &= (4+i)(7-2i)\\
31+i &= (1+i)(3-2i)(6-i)\\
31-i &= (1-i)(3+2i)(6+i)\\
32+i &= -i(2+i)^2(5+4i)\\
32-i &= i(2-i)^2(5-4i)
\end{aligned}
$$

$$34 + i = (3 + 2i)(8 - 5i)$$
$$34 - i = (3 - 2i)(8 + 5i)$$
$$38 + i = (2 - i)(4 + i)^2$$
$$38 - i = (2 + i)(4 - i)^2$$
$$41 + i = (1 + i)(5 - 2i)^2$$
$$41 - i = (1 - i)(5 + 2i)^2$$
$$43 + i = (1 + i)(2 - i)^2(6 + i)$$
$$43 - i = (1 - i)(2 + i)^2(6 - i)$$
$$46 + i = (5 + 2i)(8 - 3i)$$
$$46 - i = (5 - 2i)(8 + 3i)$$
$$47 + i = -i(1 + i)(2 + i)(3 + 2i)(4 - i)$$
$$47 - i = i(1 - i)(2 - i)(3 - 2i)(4 + i)$$
$$50 + i = (5 - 4i)(6 + 5i)$$
$$50 - i = (5 + 4i)(6 - 5i)$$
$$55 + i = -i(1 + i)(4 + i)(8 + 5i)$$
$$55 - i = i(1 - i)(4 - i)(8 - 5i)$$
$$57 + i = -i(1 + i)(2 + i)^3(3 - 2i)$$
$$57 - i = i(1 - i)(2 - i)^3(3 + 2i)$$
$$68 + i = i(2 - i)^3(6 - i)$$
$$68 - i = -i(2 + i)^3(6 + i)$$
$$70 + i = i(3 - 2i)^2(5 - 2i)$$
$$70 - i = -i(3 + 2i)^2(5 + 2i)$$
$$72 + i = (2 + i)(4 + i)(6 - 5i)$$
$$72 - i = (2 - i)(4 - i)(6 + 5i)$$
$$73 + i = -i(1 + i)(2 - i)(3 + 2i)(5 + 4i)$$
$$73 - i = i(1 - i)(2 + i)(3 - 2i)(5 - 4i)$$
$$75 + i = -i(1 + i)(5 + 2i)(9 + 4i)$$
$$75 - i = i(1 - i)(5 - 2i)(9 - 4i)$$
$$83 + i = (1 + i)(2 - i)(3 - 2i)(7 + 2i)$$
$$83 - i = (1 - i)(2 + i)(3 + 2i)(7 - 2i)$$
$$99 + i = -i(1 + i)(3 + 2i)^2(5 - 2i)$$
$$99 - i = i(1 - i)(3 - 2i)^2(5 + 2i)$$
$$117 + i = -i(1 + i)(2 + i)(6 + i)^2$$

$$117 - i = i(1-i)(2-i)(6-i)^2$$
$$119 + i = (1+i)(8-3i)(9-4i)$$
$$119 - i = (1-i)(8+3i)(9+4i)$$
$$123 + i = (1+i)(2-i)(4+i)(8-5i)$$
$$123 - i = (1-i)(2+i)(4-i)(8+5i)$$
$$132 + i = (2+i)^2(4-i)(5-4i)$$
$$132 - i = (2-i)^2(4+i)(5+4i)$$
$$133 + i = (1+i)(2-i)(5+2i)(6-5i)$$
$$133 - i = (1-i)(2+i)(5-2i)(6+5i)$$
$$157 + i = -i(1+i)(2+i)^2(4+i)(5-2i)$$
$$157 - i = i(1-i)(2-i)^2(4-i)(5+2i)$$
$$172 + i = -i(2+i)(6+5i)(9+4i)$$
$$172 - i = i(2-i)(6-5i)(9-4i)$$
$$173 + i = (1+i)(2-i)(5-4i)(8+3i)$$
$$173 - i = (1-i)(2+i)(5+4i)(8-3i)$$
$$182 + i = -i(2+i)^4(7-2i)$$
$$182 - i = i(2-i)^4(7+2i)$$
$$191 + i = -i(1+i)(4+i)(5+2i)(6+i)$$
$$191 - i = i(1-i)(4-i)(5-2i)(6-i)$$
$$216 + i = (3+2i)(6-i)(9-4i)$$
$$216 - i = (3-2i)(6+i)(9+4i)$$
$$233 + i = -i(1+i)(2-i)(6+5i)(8+5i)$$
$$233 - i = i(1-i)(2+i)(6-5i)(8-5i)$$
$$239 + i = i(1+i)(3-2i)^4$$
$$239 - i = -i(1-i)(3+2i)^4$$
$$242 + i = -i(2+i)(3+2i)(4+i)(7+2i)$$
$$242 - i = i(2-i)(3-2i)(4-i)(7-2i)$$
$$255 + i = (1+i)(3+2i)(5-4i)(6-5i)$$
$$255 - i = (1-i)(3-2i)(5+4i)(6+5i)$$
$$265 + i = (1+i)(3-2i)(6+i)(8-3i)$$
$$265 - i = (1-i)(3+2i)(6-i)(8+3i)$$
$$268 + i = (2-i)^2(3+2i)^2(4-i)$$
$$268 - i = (2+i)^2(3-2i)^2(4+i)$$

$278 + i = (2 - i)(3 - 2i)(5 + 2i)(5 + 4i)$

$278 - i = (2 + i)(3 + 2i)(5 - 2i)(5 - 4i)$

$302 + i = (2 + i)(4 - i)(5 - 2i)(6 + i)$

$302 - i = (2 - i)(4 + i)(5 + 2i)(6 - i)$

$307 + i = -(1 + i)(2 + i)^3(3 + 2i)(5 + 2i)$

$307 - i = -(1 - i)(2 - i)^3(3 - 2i)(5 - 2i)$

$319 + i = -i(1 + i)(4 - i)(5 + 4i)(8 + 3i)$

$319 - i = i(1 - i)(4 + i)(5 - 4i)(8 - 3i)$

$327 + i = -i(1 + i)(2 + i)(4 + i)^2(6 - i)$

$327 - i = i(1 - i)(2 - i)(4 - i)^2(6 + i)$

$378 + i = i(2 - i)(4 + i)(5 - 4i)^2$

$378 - i = -i(2 + i)(4 - i)(5 + 4i)^2$

$401 + i = -i(1 + i)(6 - i)(5 + 4i)(7 + 2i)$

$401 - i = i(1 - i)(6 + i)(5 - 4i)(7 - 2i)$

$411 + i = -i(1 + i)(3 + 2i)(8 - 3i)(8 + 5i)$

$411 - i = i(1 - i)(3 - 2i)(8 + 3i)(8 - 5i)$

$438 + i = i(2 - i)(4 - i)(6 - i)(6 - 5i)$

$438 - i = -i(2 + i)(4 + i)(6 + i)(6 + 5i)$

$447 + i = (1 + i)(2 + i)(3 - 2i)(5 - 2i)(7 - 2i)$

$447 - i = (1 - i)(2 - i)(3 + 2i)(5 + 2i)(7 + 2i)$

$463 + i = -i(1 + i)(2 - i)(3 + 2i)(4 + i)(9 + 4i)$

$463 - i = i(1 - i)(2 + i)(3 - 2i)(4 - i)(9 - 4i)$

$500 + i = (7 - 2i)^2(8 + 5i)$

$500 - i = (7 + 2i)^2(8 - 5i)$

$507 + i = -i(1 + i)(2 + i)^2(7 + 2i)(9 - 4i)$

$507 - i = i(1 - i)(2 - i)^2(7 - 2i)(9 + 4i)$

$538 + i = (2 - i)(3 - 2i)(6 + 5i)(8 + 3i)$

$538 - i = (2 + i)(3 + 2i)(6 - 5i)(8 - 3i)$

$557 + i = -i(1 + i)(2 + i)^3(4 - i)(8 - 3i)$

$557 - i = i(1 - i)(2 - i)^3(4 + i)(8 + 3i)$

$560 + i = (7 + 2i)(6 - 5i)(9 + 4i)$

$560 - i = (7 - 2i)(6 + 5i)(9 - 4i)$

$568 + i = i(2 - i)^3(5 + 2i)(8 - 5i)$

$$568 - i = -i(2+i)^3(5-2i)(8+5i)$$
$$606 + i = -i(3+2i)^2(5+4i)(7-2i)$$
$$606 - i = i(3-2i)^2(5-4i)(7+2i)$$
$$657 + i = -i(1+i)(2+i)^2(8-5i)(9+4i)$$
$$657 - i = i(1-i)(2-i)^2(8+5i)(9-4i)$$
$$682 + i = (2+i)^3(6-5i)^2$$
$$682 - i = (2-i)^3(6+5i)^2$$
$$684 + i = -i(3+2i)(4+i)(5+2i)(8+3i)$$
$$684 - i = i(3-2i)(4-i)(5-2i)(8-3i)$$
$$746 + i = i(3-2i)^2(6+i)(8-5i)$$
$$746 - i = -i(3+2i)^2(6-i)(8+5i)$$
$$829 + i = (1+i)(4-i)^2(5+2i)(5-4i)$$
$$829 - i = (1-i)(4+i)^2(5-2i)(5+4i)$$
$$882 + i = (2+i)^2(5-2i)^2(6-i)$$
$$882 - i = (2-i)^2(5+2i)^2(6+i)$$
$$931 + i = -i(1+i)(3+2i)(4-i)(6+i)(7+2i)$$
$$931 - i = i(1-i)(3-2i)(4+i)(6-i)(7-2i)$$
$$993 + i = i(1+i)(2-i)^2(3-2i)(6-i)(5-4i)$$
$$993 - i = -i(1-i)(2+i)^2(3+2i)(6+i)(5+4i)$$
$$1068 + i = -(2-i)^6(8-3i)$$
$$1068 - i = -(2+i)^6(8+3i)$$
$$1143 + i = (1+i)(2-i)^2(4+i)(5-2i)(7+2i)$$
$$1143 - i = (1-i)(2+i)^2(4-i)(5+2i)(7-2i)$$
$$1433 + i = (1+i)(2-i)(5-2i)(8-3i)(9+4i)$$
$$1433 - i = (1-i)(2+i)(5+2i)(8+3i)(9-4i)$$
$$1560 + i = (4-i)(6+i)(7-2i)(8+3i)$$
$$1560 - i = (4+i)(6-i)(7+2i)(8-3i)$$
$$1568 + i = (2-i)^3(3+2i)(4+i)(8+5i)$$
$$1568 - i = (2+i)^3(3-2i)(4-i)(8-5i)$$
$$1636 + i = (4+i)(5-2i)(6+5i)(8-5i)$$
$$1636 - i = (4-i)(5+2i)(6-5i)(8+5i)$$
$$1772 + i = (2+i)(4+i)^2(5-4i)(7-2i)$$
$$1772 - i = (2-i)(4-i)^2(5+4i)(7+2i)$$

$$1918 + i = (2 - i)^2(6 - i)(5 + 4i)(9 + 4i)$$
$$1918 - i = (2 + i)^2(6 + i)(5 - 4i)(9 - 4i)$$
$$2059 + i = i(1 + i)(3 - 2i)(5 - 4i)^2(9 - 4i)$$
$$2059 - i = -i(1 - i)(3 + 2i)(5 + 4i)^2(9 + 4i)$$
$$2163 + i = (1 + i)(2 - i)(3 - 2i)(4 + i)(5 + 2i)(8 - 3i)$$
$$2163 - i = (1 - i)(2 + i)(3 + 2i)(4 - i)(5 - 2i)(8 + 3i)$$
$$2309 + i = -i(1 + i)(3 + 2i)(7 + 2i)^2(8 - 3i)$$
$$2309 - i = i(1 - i)(3 - 2i)(7 - 2i)^2(8 + 3i)$$
$$2436 + i = i(3 - 2i)^3(6 - i)(8 + 3i)$$
$$2436 - i = -i(3 + 2i)^3(6 + i)(8 - 3i)$$
$$2673 + i = -i(1 + i)(2 - i)(3 + 2i)(4 + i)(7 - 2i)(6 + 5i)$$
$$2673 - i = i(1 - i)(2 + i)(3 - 2i)(4 - i)(7 + 2i)(6 - 5i)$$
$$2738 + i = (2 - i)(3 + 2i)(5 - 2i)(5 + 4i)(9 - 4i)$$
$$2738 - i = (2 + i)(3 - 2i)(5 + 2i)(5 - 4i)(9 + 4i)$$
$$2917 + i = -i(1 + i)(2 + i)(3 - 2i)(5 + 2i)(6 - i)(6 + 5i)$$
$$2917 - i = i(1 - i)(2 - i)(3 + 2i)(5 - 2i)(6 + i)(6 - 5i)$$
$$2943 + i = i(1 + i)(2 - i)^4(3 - 2i)^2(5 + 4i)$$
$$2943 - i = -i(1 - i)(2 + i)^4(3 + 2i)^2(5 - 4i)$$
$$3039 + i = -i(1 + i)(4 - i)(6 + 5i)^2(8 - 3i)$$
$$3039 - i = i(1 - i)(4 + i)(6 - 5i)^2(8 + 3i)$$
$$3793 + i = (1 + i)(2 - i)^2(7 + 2i)(6 - 5i)(8 + 5i)$$
$$3793 - i = (1 - i)(2 + i)^2(7 - 2i)(6 + 5i)(8 - 5i)$$
$$4193 + i = i(1 + i)(2 - i)^5(5 + 2i)(9 - 4i)$$
$$4193 - i = -i(1 - i)(2 + i)^5(5 - 2i)(9 + 4i)$$
$$4217 + i = (1 + i)(2 + i)(3 - 2i)(5 - 2i)(7 + 2i)(8 - 5i)$$
$$4217 - i = (1 - i)(2 - i)(3 + 2i)(5 + 2i)(7 - 2i)(8 + 5i)$$
$$4246 + i = (3 + 2i)(4 - i)(5 - 2i)^2(9 + 4i)$$
$$4246 - i = (3 - 2i)(4 + i)(5 + 2i)^2(9 - 4i)$$
$$4594 + i = (3 - 2i)(4 + i)(5 - 2i)(6 + i)(8 + 5i)$$
$$4594 - i = (3 + 2i)(4 - i)(5 + 2i)(6 - i)(8 - 5i)$$
$$4662 + i = -i(2 + i)(3 + 2i)^2(4 + i)^2(8 - 5i)$$
$$4662 - i = i(2 - i)(3 - 2i)^2(4 - i)^2(8 + 5i)$$
$$4747 + i = -(1 + i)(2 + i)(4 + i)(5 + 4i)(7 + 2i)(6 + 5i)$$

$$4747 - i = -(1-i)(2-i)(4-i)(5-4i)(7-2i)(6-5i)$$
$$4952 + i = (2+i)(6-i)(5+4i)(7-2i)(6-5i)$$
$$4952 - i = (2-i)(6+i)(5-4i)(7+2i)(6+5i)$$
$$5257 + i = (1+i)(2+i)^2(3-2i)(4+i)(5-4i)(6-5i)$$
$$5257 - i = (1-i)(2-i)^2(3+2i)(4-i)(5+4i)(6+5i)$$
$$5357 + i = -i(1+i)(2+i)^2(6+5i)(9-4i)^2$$
$$5357 - i = i(1-i)(2-i)^2(6-5i)(9+4i)^2$$
$$5507 + i = -(1+i)(2+i)^2(3+2i)^2(6-i)(9+4i)$$
$$5507 - i = -(1-i)(2-i)^2(3-2i)^2(6+i)(9-4i)$$
$$5648 + i = (2-i)(4+i)(7+2i)(8+3i)(9-4i)$$
$$5648 - i = (2+i)(4-i)(7-2i)(8-3i)(9+4i)$$
$$5667 + i = (1+i)(2+i)(5-2i)(6+i)(5-4i)(8-3i)$$
$$5667 - i = (1-i)(2-i)(5+2i)(6-i)(5+4i)(8+3i)$$
$$6107 + i = -(1+i)(2+i)^2(4+i)^2(5+2i)(8+5i)$$
$$6107 - i = -(1-i)(2-i)^2(4-i)^2(5-2i)(8-5i)$$
$$6118 + i = i(2-i)^2(3+2i)(5-4i)(7-2i)^2$$
$$6118 - i = -i(2+i)^2(3-2i)(5+4i)(7+2i)^2$$
$$6962 + i = -i(2+i)(6+i)^2(8+3i)(9+4i)$$
$$6962 - i = i(2-i)(6-i)^2(8-3i)(9-4i)$$
$$8368 + i = i(2-i)^2(4+i)(6+i)(6-5i)(8-3i)$$
$$8368 - i = -i(2+i)^2(4-i)(6-i)(6+5i)(8+3i)$$
$$9193 + i = i(1+i)(2-i)^4(4-i)(5-4i)(9+4i)$$
$$9193 - i = -i(1-i)(2+i)^4(4+i)(5+4i)(9-4i)$$
$$9466 + i = i(5-2i)(6-i)^3(6-5i)$$
$$9466 - i = -i(5+2i)(6+i)^3(6+5i)$$
$$9872 + i = (2+i)(3-2i)^2(5-2i)(5+4i)(9+4i)$$
$$9872 - i = (2-i)(3+2i)^2(5+2i)(5-4i)(9-4i)$$