バーゼル問題の初等的解法

小林健太（一橋大学商学研究科）

1. 目的

バーゼル問題

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

を高校数学の範囲で証明する．高校数学の範囲でも証明方法はいくつかあるが，ここではフーリエ級数を用いた方法を紹介する（ただし，フーリエ級数自体は証明には明示的には出てこない）．

2. 証明

以下，$0\leq x\leq\pi$ とする．まずは和積の公式

$$2\sin\frac{x}{2}\,\cos kx=\sin\frac{2k+1}{2}x-\sin\frac{2k-1}{2}x$$

から始める．これを $k=1$ から $k=n$ まで足すと

$$2\sin\frac{x}{2}\,\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

となる．よって

$$D_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} & (x\neq 0)\\ 2n+1 & (x=0)\end{cases}$$

とおくと，$D_n(x)$ は $0\leq x\leq\pi$ で連続で

$$-2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=1-D_n(x)$$

が成り立つ．

ここで，両辺に $\dfrac{x(2\pi-x)}{4\pi}$ をかけて 0 から π まで積分すると，左辺は

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}x(2\pi-x)\cos kx\,dx&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}2(\pi-x)\sin kx\,dx\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}\left\{\left[-(\pi-x)\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right\}\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

となり，一方で右辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} x(2\pi-x)\left(1-D_n(x)\right)dx &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} x(2\pi-x)dx - \frac{8}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\pi-t)D_n(2t)dt \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\pi-t)D_n(2t)dt
\end{aligned}
$$

となる．よって，$n\to\infty$ で

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\pi-t)D_n(2t)dt \to 0
$$

となることが言えれば

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
$$

が示される．

3．剰余項の評価

評価したい積分の積分区間を

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(t-\pi)D_n(2t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} t(\pi-t)\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} t(\pi-t)\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt
$$

と二つに分けて評価する．まず，前半部分は

$$
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} t(\pi-t)\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} t\pi\cdot\frac{1}{2t/\pi}dt = \frac{\pi^3}{4(2n+1)}
$$

後半部分は

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} t(\pi-t)\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt\right| &= \left|-\frac{1}{2n+1}\left[t(\pi-t)\cdot\frac{\cos(2n+1)t}{\sin t}\right]_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\right. \\
&\qquad\left. +\frac{1}{2n+1}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t(\pi-t)}{\sin t}\right)'\cos(2n+1)t\,dt\right| \\
&= \frac{1}{2n+1}\left|\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t(\pi-t)}{\sin t}\right)'\cos(2n+1)t\,dt\right| \\
&\le \frac{1}{2n+1}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(\frac{t(\pi-t)}{\sin t}\right)'\right|dt \\
&= \frac{1}{2n+1}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{(\pi-2t)\sin t - t(\pi-t)\cos t}{\sin^2 t}\right|dt
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$g(t) = \frac{(\pi - 2t)\sin t - t(\pi - t)\cos t}{\sin^2 t}$$

とおくと，$0 < t \leq \dfrac{\pi}{2}$ で

$$g(t) = \frac{\pi - 2t - t(\pi - t)/\tan t}{\sin t} \geq \frac{\pi - 2t - t(\pi - t)/t}{\sin t} = -\frac{t}{\sin t} \geq -\frac{\pi}{2}$$

かつ

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \frac{(\pi - 2t)t - t(\pi - t)\cos t}{\sin^2 t} = \frac{-t^2 + t(\pi - t)(1 - \cos t)}{\sin^2 t} \\ &= \frac{-t^2 + 2t(\pi - t)\sin^2 \frac{t}{2}}{4\sin^2 \frac{t}{2}\cos^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{t(\pi - t)}{2\cos^2 \frac{t}{2}} \leq t(\pi - t) \leq \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} t(\pi - t) \cdot \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt \right| \leq \frac{1}{2n+1} \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} dt < \frac{\pi^3}{8(2n+1)}$$

と評価できる．

以上より，$n \to \infty$ で

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\pi - t) D_n(2t) dt \right| \leq \frac{\pi^3}{4(2n+1)} + \frac{\pi^3}{8(2n+1)} = \frac{3\pi^3}{8(2n+1)} \to 0$$

となるので，求める等式が示された．

4. 補足

以下は高校数学の範囲外になる．この証明の背後にあるのは，ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ のフーリエ級数展開

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \right), \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

である（等号は超関数の意味で成り立つ）．これを変形して

$$\frac{x(2\pi - x)}{4\pi}\Big(1 - 2\pi\delta(x)\Big) = -\frac{x(2\pi - x)}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

とし，両辺を 0 から π まで積分すると，求める等式が得られる．その際，$\delta(x)$ は x がかかっているために積分値に影響を与えず，

$$\int_0^{\pi} \frac{x(2\pi - x)}{4\pi}\Big(1 - 2\pi\delta(x)\Big) dx = \int_0^{\pi} \frac{x(2\pi - x)}{4\pi} dx$$

となることに注意する．

証明に出てきた $D_n(x)$ はフーリエ級数の理論で重要な役割を果たすディリクレ積分核と呼ばれるものである．今回の証明では，

$$\int_0^\pi x(2\pi - x)D_n(x)dx = \int_0^\pi x(2\pi - x)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

が 0 に収束することが重要であり，その証明も記したが，実はリーマン・ルベーグの補題により，$\dfrac{f(x)}{\sin\frac{x}{2}}$ が $(0,\pi)$ で可積分なら

$$\int_0^\pi f(x)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}dx \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となることが知られている．このとき，可積分条件より $f(0)=0$ でなければならないことも考慮すると，δ 関数が消えて

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = -2\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$$

が成り立つので，$f(x)$ を変えることにより様々な等式を証明することができる．例えば

$$f(x) = \frac{x^2(2\pi - x)^2}{48\pi}$$

とすれば

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

が，

$$f(x) = \frac{x^3(2\pi - x)^3}{1440\pi}$$

とすれば

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6} - \frac{\pi^2}{15}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^6}{3150}$$

が示される．