誤差関数の計算

小林健太（一橋大学商学研究科）

誤差関数 $\mathrm{erf}(x)$ は

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

で定義される関数であり，偏微分方程式など，色々なところで用いられる．また，誤差関数と標準正規分布の累積密度関数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

の間には

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

という関係がある．

誤差関数や標準正規分布の累積密度関数を計算したいとき，プログラム言語で実装されていない場合には，自分でプログラムを組んで計算する必要がある．

x の絶対値が小さいときには Taylor 展開が有効である．

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

x の絶対値がある程度大きいときには，連分数展開を用いるとよい．以下は Laplas による連分数展開で，$x > 0$ について有効である．

$$\mathrm{erf}(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{2}x + \cfrac{1}{\sqrt{2}x + \cfrac{2}{\sqrt{2}x + \cfrac{3}{\sqrt{2}x + \cfrac{4}{\sqrt{2}x + \cdots}}}}}.$$

$\mathrm{erf}(x)$ は奇関数であるので，$x < 0$ のときには $\mathrm{erf}(x) = -\mathrm{erf}(-x)$ で計算すればよい．

C 言語によるプログラミング例を以下に示す．$|x| < 2.4$ のときには Taylor 展開，$|x| \geq 2.4$ のときには連分数展開を用いている．計算する項数はいずれも 40 項とした．多倍長演算を用いて確認したところ，どのような x に対しても，相対誤差は 1.235×10^{-19} 以下となることが確かめられた．倍精度実数で計算する場合には，この誤差は丸め誤差に比べて十分に小さい．

```
#include <math.h>

double erf(double x){
    int n;
    double absx;
    double a, c, y;

    absx = fabs(x);
    if(absx<2.4){
        c = 1;
        a = 0;
        for(n=1; n<=40; n++){
            a += x/(2*n-1)*c;
            c = -c * x*x/n;
        }
        return a*2/sqrt(M_PI);
    } else {
        if(absx>1.0E50){
            a = 1;
        } else {
            y = absx*sqrt(2.0);
            a = 0;
            for(n=40; n>=1; n--){
                a = n/(y+a);
            }
            a = 1 - exp(-x*x)/(y+a)*sqrt(2/M_PI);
        }
        if(x<0){
            return -a;
        } else {
            return a;
        }
    }
}
```