Fourier 級数が発散する連続関数の例

小林健太（一橋大学商学研究科）

連続関数で，Fourier 級数が一点で発散するものが存在するという事実は Paul du Bois-Reymond（1876）によって示されているが，その構成法はやや複雑なので，もう少し簡単な例を考えてみた．まず，

$$d_n = 2^{n^2} + \frac{1}{2} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

と置くと，

$$d_n = 2^{n^2}\left(1 + \frac{1}{2^{n^2+1}}\right) \le 2^{n^2} \cdot \frac{5}{4} \le 2^{n^2} \cdot 2^n = 2^{n^2+n}$$

となる．よって

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2^{(n+1)^2} + \frac{1}{2}}{2^{n^2} + \frac{1}{2}} > \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2+n}} = 2^{n+1}$$

より，$2^{n+1} d_n < d_{n+1}$ が成り立つ．ここで，周期 2π の周期関数 f を以下のように決める．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin d_n x & \left(\dfrac{\pi}{d_n} < x < \dfrac{2^n}{d_n}\pi,\ \ n = 1, 2, 3, \cdots\right) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin d_n x & \left(-\dfrac{2^n}{d_n}\pi < x < -\dfrac{\pi}{d_n},\ \ n = 1, 2, 3, \cdots\right) \\ 0 & \left(\dfrac{2^{n+1}}{d_{n+1}}\pi \le |x| \le \dfrac{\pi}{d_n},\ \ n = 1, 2, 3, \cdots\right) \\ 0 & \left(x = 0,\ \ \dfrac{2}{d_1}\pi \le |x| \le \pi\right) \end{cases}$$

この f が連続であることは容易に確かめられるが，f の Fourier 級数が $x = 0$ で発散することを示す．f の Fourier 級数の k 項までの部分和を f_k で表すと，$m = 1, 2, \cdots$ について

$$\begin{aligned} f_{2^{m^2}}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(2^{m^2} + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin d_m x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\frac{\pi}{d_n}}^{\frac{2^n}{d_n}\pi} \frac{\sin d_n x \sin d_m x}{\sin \frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

となる．ここで，$n = m$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{d_n}}^{\frac{2^n}{d_n}\pi} \frac{\sin d_n x \sin d_m x}{\sin \frac{x}{2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{d_m}}^{\frac{2^m}{d_m}\pi} \frac{\sin^2 d_m x}{\sin \frac{x}{2}} dx > 2 \int_{\frac{\pi}{d_m}}^{\frac{2^m}{d_m}\pi} \frac{\sin^2 d_m x}{x} dx \\ &= 2 \sum_{k=2}^{2^m} \int_{\frac{k-1}{d_m}\pi}^{\frac{k}{d_m}\pi} \frac{\sin^2 d_m x}{x} dx > 2 \sum_{k=2}^{2^m} \int_{\frac{k-1}{d_m}\pi}^{\frac{k}{d_m}\pi} \frac{\sin^2 d_m x}{\frac{k}{d_m}\pi} dx \\ &= \sum_{k=2}^{2^m} \frac{1}{k} > \int_2^{2^m} \frac{dx}{x+1} = \log(2^m + 1) - \log 3 > m \log 2 - \log 3 > \frac{m-3}{2} \end{aligned}$$

であり，$1 \leq p < q$ なる整数 p, q と，$0 < a < b$ なる実数に対して

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\sin d_p x \sin d_q x}{\sin \frac{x}{2}} dx = \int_a^b \left(1 + 2\sum_{k=1}^{2^{p^2}} \cos kx\right) \sin d_q x \, dx \\
&= \int_a^b \left(\sin d_q x + \sum_{k=1}^{2^{p^2}} \Big(\sin(d_q - k)x + \sin(d_q + k)x \Big) \right) dx \\
&= \frac{\cos d_q a - \cos d_q b}{d_q} + \sum_{k=1}^{2^{p^2}} \left(\frac{\cos(d_q - k)a - \cos(d_q - k)b}{d_q - k} + \frac{\cos(d_q + k)a - \cos(d_q + k)b}{d_q + k} \right) \\
&\geq -\frac{2}{d_q} - \sum_{k=1}^{2^{p^2}} \left(\frac{2}{d_q - k} + \frac{2}{d_q + k} \right) = -\frac{1}{2^{q^2-1}} - \sum_{k=1}^{2^{p^2}} \left(\frac{2}{2^{q^2} - k} + \frac{2}{2^{q^2} + k} \right) \\
&= -\frac{1}{2^{(q-1)(q+1)}} - \sum_{k=1}^{2^{p^2}} \frac{2^{q^2+2}}{2^{2q^2} - k^2} > -\frac{1}{2^{q+1}} - \frac{2^{q^2+2} 2^{p^2}}{2^{2q^2} - 2^{2p^2}} \\
&= -\frac{1}{2^{q+1}} - \frac{1}{2^{q^2-p^2-2}} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2(q^2-p^2)}} = -\frac{1}{2^{q+1}} - \frac{1}{2^{(q-p)(q+p)-2}} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-2(q-p)(q+p)}} \\
&> -\frac{1}{2^{q+1}} - \frac{1}{2^{q+p-2}} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-6}} = -\frac{1}{2^{q-1}} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{q-1}} \cdot \frac{64}{63} > -\frac{1}{2^{q-2}}
\end{aligned}
$$

が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
f_{2^{m^2}}(0) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\frac{\pi}{d_n}}^{\frac{2^n}{d_n}\pi} \frac{\sin d_n x \sin d_m x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\
&> \frac{1}{\pi} \left(-\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{m-3}{2} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \right) \\
&> \frac{1}{\pi} \left(-\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{m-3}{2} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{m-3}{2} - \frac{m-1}{2^{m-2}} \right) \to \infty \quad (m \to \infty)
\end{aligned}
$$

よって f の Fourier 級数は $x = 0$ で発散する．