Laplace 方程式の古典解の一意性について

小林健太（一橋大学商学研究科）

Ω を $\mathbb{R}^n$ の適当な領域とし，Laplace 方程式

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (\text{in } \Omega) \\ u = f & (\text{on } \partial\Omega) \end{cases}$$

を考える．このとき，この Laplace 方程式の古典解は存在すれば一意的であることが知られている．

偏微分方程式において，解の存在や一意性は，解の範囲を限定した上でないと議論できない．古典解とはこの場合 C^2 級の解のことであるが，C^2 級という条件を外し，例えば Δu が連続という条件だけだと，必ずしも解の一意性が成り立たなくなってしまう．

以下のそのような場合の例を示す．

Ω を $\mathbb{R}^2$ の単位円，c を定数とし

$$u = \begin{cases} 0 & ((x,y) = (0,0)) \\ c\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} - 1\right)xy & ((x,y) \neq (0,0)) \end{cases}$$

とする．このとき，計算すれば $\Delta u = 0$ となることが確かめられるので，u は

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (\text{in } \Omega) \\ u = 0 & (\text{on } \partial\Omega) \end{cases}$$

の解となる．ここで c は定数なので，この方程式には無数に解がある．