ロピタルの定理の反例について

小林健太（一橋大学経営管理研究科）

ロピタルの定理は以下の定理である．

「c を含むある開区間を I とする（ただし，c としては $\pm\infty$ も許容する）．$I \setminus \{c\}$ で微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について

(i) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$ の値が 0 または $\pm\infty$,

(ii) $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する,

(iii) $I \setminus \{c\}$ で $g'(x) \neq 0$,

の 3 条件が成り立つとき，$\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ.」

ロピタルの定理の 3 条件のうち，どれか一つでも欠けると定理は成立しない．例えば，(i) が成り立たない場合には，$f(x) = 1 + 2x$, $g(x) = 1 + x$ とおくと

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x}{1+x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

となり定理は成立しない.

(ii) が成り立たない場合には，$\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しないことから，もちろん定理は成立しないが，具体例としては，たとえば $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$ がある．このとき

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = -\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$$

となって，$\cos \dfrac{1}{x}$ が振動するため $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ は存在しない.

(iii) が成り立たない場合については

R. P. Boas, Counterexamples to L'Hopital's Rule, *Amer. Math. Monthly*, **93**(1986), pp. 644–645.

に

$$f(x) = x + \cos x \sin x, \qquad g(x) = e^{\sin x}(x + \cos x \sin x)$$

なる反例が載っている．この反例は $c = \infty$ の場合の例であり，$x \to \infty$ で $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が振動して収束せず，一方で $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to 0$ となる.

しかし，この反例はいささか完成度が低いように感じる．まず，$c = \infty$ というのがいまいちである．ロピタルの定理の応用としては，c が例えば 0 のような実数の方が，使われ

る機会が多いだろうし，数学的な感覚としては，x を無限大に発散させて良いなら，都合よく何とでも作れるような気もする．さらに，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が振動するというのもいただけない．振動した時点で極限は無いので，その場合は当然，ロピタルの定理は成立しないが，それよりも，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ もちゃんと収束するのに一致しないような例の方が，よりクリティカルで面白い反例だと思う．

以上の考えを念頭に，ここでは，ロピタルの定理の条件 (i) と (ii) は満たすが (iii) を満たさず

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=2$$

となる関数 $f(x), g(x)$ を作ってみた．さらに，$f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ の極限はすべて 0 になるようにした（つまり，$x=0$ での値を 0 と定めれば連続関数となる）．

ここで注意がある．反例は，0 のまわりにどんなに小さな開区間 I を取っても (iii) が満たされない関数となるので，0 に収束し，かつ $g'(x_k)=0$ となる点列 $\{x_k\}$ が存在することになる．よって，このような点列上で $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ を考えると，極限は存在しないことになり，その時点でロピタルの定理は意味をなさないことになる．しかし，それでは面白くないので，$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ を式として計算した結果（つまり，分母分子を通分した結果）について極限を計算することにする．上で述べた R. P. Boas による反例でも，$f'(x)$ と $g'(x)$ の双方ともに $\cos x$ がかかった形になるが，分母分子でキャンセルされるようになっている．

色々と細かく調整して得られたのが，以下の反例である．

$$\begin{cases} f(x)=x^3\left(4+2x\cos\dfrac{1}{x^2}+3x^2\sin\dfrac{2}{x^2}+4x^3\sin\dfrac{1}{x^2}\right), \\ g(x)=x^3\left(4+x\cos\dfrac{1}{x^2}+3x^2\sin\dfrac{2}{x^2}+2x^3\sin\dfrac{1}{x^2}\right). \end{cases}$$

この関数が

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

を満たすことは容易に確かめられる．

次に，$f'(x)$ および $g'(x)$ を計算すると以下のようになる．

$$\begin{cases} f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(2+12x\sin\dfrac{1}{x^2}+15x^3\cos\dfrac{1}{x^2}+12x^4\right), \\ g'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(1+12x\sin\dfrac{1}{x^2}+15x^3\cos\dfrac{1}{x^2}+6x^4\right). \end{cases}$$

これより

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}g'(x)=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=2$$

となることがわかる．