$x^y = y^x$ の非負の有理数解について

小林健太（一橋大学商学研究科）

x, y は非負の有理数とする．$x = y$ は自明なので，以後は $0 < x < y$ の場合を考える．$y = \alpha x$ と置くと，

$$x\alpha \log x = x(\log x + \log \alpha)$$

より，

$$x = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}, \qquad y = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

と書ける．さて，$y = \alpha x$ より α は非負の有理数でなければならない．
p, q を互いに素な自然数として $\alpha = \dfrac{q}{p}$ とする．p', q' を $pp' - qq' = 1$ なる整数とすると，

$$x^{p'} y^{-q'} = \alpha^{\frac{p'}{\alpha-1} - \frac{q'\alpha}{\alpha-1}} = \alpha^{\frac{pp'-qq'}{q-p}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q-p}}$$

となる．ここで $x^{p'} y^{-q'}$ は有理数なので，$x^{p'} y^{-q'} = \dfrac{s}{r}$（ただし r, s は互いに素とする）と置くと

$$\frac{q}{p} = \left(\frac{s}{r}\right)^{q-p} \qquad \text{つまり，} \qquad qr^{q-p} = ps^{q-p}$$

となる．さて，$(p, q) = (r, s) = 1$ より $p = r^{q-p}$ と $q = s^{q-p}$ が成り立つので，

$$q - p = s^{q-p} - r^{q-p}$$

が言える．$q - p = k$ と置くと

$$k = s^k - r^k$$

となる．さて，$\alpha > 1$ から $k \geq 1$ が言えるので $s > r$ が言え，更に

$$k = s^k - r^k = (s - r)(s^{k-1} + s^{k-2}r + \cdots + r^{k-1}) \geq k(s - r)$$

より $s - r = 1$ でなければならないこともわかる．改めて書くと，

$$k = (r + 1)^k - r^k$$

となる．これは $k = 1$ の場合は任意の r で成り立つが，$k \geq 2$ では成り立たない．よって，$q = p + 1$ の時が求める解になる．$x < y$ の時は逆になる．

結論：
$x^y = y^x$ の非負の有理数解で，x と y が等しくないようなものは，p を任意の自然数として

$$x = \left(1 + \tfrac{1}{p}\right)^p, \qquad y = \left(1 + \tfrac{1}{p}\right)^{p+1}$$

もしくは

$$x = \left(1 + \tfrac{1}{p}\right)^{p+1}, \qquad y = \left(1 + \tfrac{1}{p}\right)^p$$

で尽くされる．